

3465

Т 544

В. К. Толстых

Прямой экстремальный подход
для оптимизации систем
с распределенными
параметрами



Донецкий государственный университет

В. К. Толстых

Прямой экстремальный подход
для оптимизации систем
с распределенными
параметрами

Утверждено к печати ученым советом
Донецкого государственного университета

Донецк
"Юго-Восток"
1997

УДК 517.97
Т 58

Т58 Толстых В. К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами.-Донецк: Изд."Юго-Восток", 1997.-177 с., с ил., ил. 46, табл. 9, библи. 123 назв.

Рецензенты: д. ф.-м. н., проф. В.А. Шалдырван, д. т. н., проф. С.В. Мышко. Научный редактор: д. т. н., проф. Ф.В. Недопекин
ISBN 966-7239-20-9

Традиционные методы оптимизации (принцип максимума, динамическое программирование и др.) при поиске оптимальных управлений пространственно-распределенных систем не всегда дают желаемые результаты. В монографии рассматривается относительно универсальный прямой экстремальный подход для оптимизации систем, описываемых уравнениями в частных производных. Основу подхода составляют новые необходимые и достаточные условия оптимальности. На их основе разработан ряд адаптивных алгоритмов минимизации функционалов, которые могут регулировать характер сходимости к оптимали и добиваться равномерной сходимости. Демонстрируется приложение прямого подхода к четырем задачам оптимизации пространственно-распределенных систем.

Для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области оптимизации динамических и пространственно-распределенных систем, а также для студентов старших курсов физических и математических специальностей.

ISBN 966-7239-20-9

© В. К. Толстых, 1997.
© Издательство "Юго-Восток", 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Задачи оптимизации систем с распределенными параметрами	
1.1. Простейшая задача оптимального управления тепловыми процессами.....	10
1.2. Идентификация параметров открытых русел.....	13
1.3. Оптимальное управление работой гидротехнических сооружений	17
1.4. Оптимальное управление охлаждением непрерывного слитка.....	22
2. Методы оптимизации систем с распределенными параметрами	
2.1. Классическое вариационное исчисление.....	31
2.2. Принцип максимума Понтрягина.....	33
2.3. Вариационные неравенства.....	36
2.4. Другие неярные методы.....	38
2.5. Экстремальные методы.....	40
3. Основы прямого экстремального подхода для оптимизации систем с распределенными параметрами	
3.1. Исследование проблем сходимости экстремальных алгоритмов.....	49
3.2. Производные в бесконечномерном пространстве.....	59
3.3. Необходимые условия оптимальности.....	65
3.4. Достаточные условия оптимальности.....	68
4. Алгоритмы минимизации функционалов с регулируемым направлением спуска	
4.1. Регуляризация в алгоритмах минимизации.....	73
4.2. Реализация необходимых условий оптимальности.....	77
4.3. Учет достаточных условий оптимальности.....	86
4.4. Оптимизация с ограничениями.....	95

5. Градиент целевого функционала. Управляемость

5.1. Общая идея определения производной Фреше неявно заданного функционала.....	103
5.2. Управляемость СРП.....	107
5.3. Градиент в простейшей задаче оптимального управления тепловыми процессами.....	111
5.4. Градиент в задаче идентификации параметров открытых русел.....	115
5.5. Градиент в задаче оптимального управления работой насосной станции на канале.....	121
5.6. Градиент в задаче оптимального управления охлаждением непрерывного слитка.....	129

6. Численные примеры оптимизации систем

6.1. Оптимальное управление потоком тепла в простейшем химическом реакторе.....	134
6.2. Идентификация коэффициента шероховатости открытого русла.....	150
6.3. Оптимальное управление работой насосной станции на канале.....	158
6.4. Оптимальное управление охлаждением непрерывного стального слитка.....	164

Список литературы.....	170
------------------------	-----

ВВЕДЕНИЕ

Все физические объекты имеют некоторую протяженность в пространстве. Если скорость возмущений, характерных для функционирования объекта велика (практически ее можно принять равной бесконечности), то его идеализируют и представляют системой с сосредоточенными параметрами. В противном случае, когда пространственной протяженностью объекта пренебречь нельзя, его рассматривают как систему с распределенными параметрами (СРП).

СРП охватывает широкий круг объектов и процессов. Это системы, состояние которых зависит от одной, двух или трех пространственных переменных, стационарные или нестационарные. Проблемы математического моделирования таких систем, оптимальное управление, автоматизация, создание на их основе экономических, экологически чистых производств является актуальным. Перечисленные задачи могут решаться в полной мере только при наличии эффективных методов оптимизации СРП.

Управление в СРП может быть не только числом, вектором но и функцией пространственных и временной переменных, что существенно усложняет и постановку и решение оптимизационных задач.

В данной монографии рассматриваются четыре задачи оптимизации СРП. Первая задача оптимального управления связана с одномерным, линейным параболическим уравнением, которому ставится в соответствие некоторый простейший химический реактор. Задача управления заключается в удержании номинальной температуры реакции, проходящей с поглощением тепла [32,120]. На примере данной задачи исследуются и тестируются традиционные и новые, разработанные автором, экстремальные методы оптимизации.

Вторая и третья задачи оптимизации связаны с течением воды в открытых руслах - в каналах и реках. СРП, описывающая данные процессы, представляет собой квазилинейную нестационарную гиперболическую систему. В первом случае рассматривается задача идентификации математической модели русловых течений, которая затем решается как оптимизационная [8,33-35,120]. Ищется оптимальное значение распределенного по длине русла коэффициента шероховатости, который существенно влияет на точность моделирования. Данный коэффициент характеризует трение воды о ложе русла и прямым измерениям не поддается.

Математические модели русловых течений широко используются

для управления передачей воды в гидроэнергетике, мелиорации, водном транспорте, водоснабжении и др. [7,41,108,109] В настоящей книге рассматривается задача оптимального управления режимом работы насосной станции на канале. Особенностью данной задачи является наличие множества ограничений. Исследуются ограничения на максимально возможные расходы воды (управление в ограниченном допустимом множестве), на общее заданное количество перекачиваемой воды (изопериметрическое условие), на характер включения насосных агрегатов (управление в классе кусочно-постоянных функций), ограничение на состояние потока - на максимально допустимый уровень воды в канале.

Последняя четвертая задача посвящена проблеме металлургии - управлению качеством непрерывной разливки стали [31,71,74,86,103,122]. Здесь СРП - это нелинейное эллиптическое уравнение. Исследуется проблема оптимального теплоотвода в зоне вторичного охлаждения цилиндрического слитка с целью минимизации термических напряжений. Высокие термонапряжения приводят к разрушению металла. Задача оптимизации впервые формулируется для управления-функции по длине слитка и с ограничением на температуру выхода слитка из машины непрерывного литья.

В настоящее время имеется большое разнообразие подходов и методов в теории оптимального управления СРП. Во второй главе вкратце рассматриваются традиционные наиболее известные подходы - это классическое вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина, вариационные неравенства, динамическое программирование, проблема моментов. Все они были рождены для оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами.

Бесконечномерность фазового пространства СРП приводит к исчезновению формализма в алгоритмах решения, превращает необходимые условия оптимальности (НУО) в громоздкие выражения, подчас принципиально не реализуемые при практическом построении оптимального управления [44,56].

Каждый из указанных подходов имеет свой математический аппарат и специфическую точку зрения на решение задач оптимизации. Обильные теоретические исследования в данной области относительно редко имеют численные реализации. В основном рассматриваются линейные СРП. В общем случае отсутствуют достаточные условия оптимальности (ДУО), предполагается гладкость задач. Все это

подтверждает отсутствие универсального, эффективного подхода к решению задач оптимизации СРП.

Перечисленные выше традиционные подходы являются непрямыми. Они разбивают решение задачи оптимизации на два этапа: 1- отыскание выражения, представляющего собой ту или иную форму НУО; 2- поиск оптимального управления из полученного выражения НУО. Для СРП оба эти этапа являются весьма громоздкими и не всегда преодолимыми, не говоря уже, о низкой наглядности всей процедуры достижения конечного результата.

Представляется целесообразным для решения задач оптимизации СРП использовать прямой подход, основанный на непосредственной минимизации целевого функционала различными экстремальными методами. При этом возможны два пути: 1- минимизация целевого функционала в бесконечномерном пространстве управлений; 2- аппроксимация задачи оптимизации конечными разностями и сведение ее к задаче конечномерной оптимизации. Особенности каждого из этих путей рассмотрены в конце второй главы. Показано, что второй путь весьма громоздок для СРП и, кроме того, порождает множество дополнительных проблем, по-существу, превращая прямой подход в непрямой.

Современные алгоритмы бесконечномерной минимизации достаточно полно описаны в работах [28, 83]. Однако в них отсутствуют примеры численных решений. В §5 главы 2 на примере конкретных решений первой задачи оптимального управления химическим реактором демонстрируются слабые стороны традиционных бесконечномерных методов. Тестируются градиентные методы и метод сопряженных градиентов. Указанные методы не приводят к точному решению за значительное число итераций, они не реализуют классическое НУО - равенство нулю нормы градиента целевого функционала.

ДУО для экстремальных методов имеется только для выпуклых и дифференцируемых функционалов. Проверка выпуклости целевого функционала может оказаться весьма громоздкой и проблематичной процедурой, особенно для нелинейных СРП. В реальных прикладных задачах целевые функционалы могут быть невыпуклыми и недифференцируемыми.

Анализ современных подходов и методов оптимизации СРП приводит к следующему выводу. "Несмотря на обилие разнообразных публикаций, в теории управления СРП пока не удалось получить удовлетворительного ответа на многие вопросы, которые для

конечномерных систем являются элементарными" [44].

Таким образом, проблемы бесконечномерной минимизации, которые присутствуют практически во всех задачах оптимизации СРП, по сей день остаются актуальными. В связи с вышеизложенным, целью настоящей работы являлась разработка нового эффективного прямого экстремального подхода в теории оптимизации СРП. Данная цель была достигнута посредством решения двух основных задач: 1 – разработка новых НУО и ДУО; 2 – разработка на основе НУО и ДУО новых адаптивных экстремальных алгоритмов прямой минимизации функционалов.

Основы нового прямого подхода закладываются в третьей главе, где сформулированы и доказаны новые НУО и ДУО для функционалов произвольной выпуклости и локально недифференцируемых [96,102,121]. Новые условия оптимальности формулируются в локальной форме для всех (почти всех) пространственно-временных точек определения функции-управления. Кроме того, ДУО формулируются относительно поведения только *первых* производных (градиента) целевого функционала в *окрестности* экстремума. Последнее обстоятельство особенно удобно для реализации ДУО итерационными алгоритмами. Формулировка НУО в локальной форме позволяет исследовать и контролировать характер сходимости управления к оптимальному значению, чего невозможно сделать при традиционной интегральной форме НУО.

Глава 4 посвящена разработке новых численных алгоритмов минимизации [96,98,100,120], основанных на новых НУО и ДУО. Такие алгоритмы позволяют при помощи специального параметра-функции α регулировать направление спуска относительно градиента или сопряженных градиентов, обеспечивая при этом равномерную сходимость к оптимальному управлению. Новые алгоритмы с регулируемым направлением спуска могут адаптироваться при помощи параметра α к минимизации различных функционалов. Такие алгоритмы обладают высокой адаптацией к экспериментальным и вычислительным погрешностям. В §1 доказываются регуляризирующие свойства алгоритмов. В §3 рассматриваются два метода адаптации функции α – это эвристический метод и метод, основанный на новой локальной форме НУО.

Особенностью задач оптимального управления является то, что целевой функционал всегда неявно зависит от управления, поэтому его минимизация сопровождается рядом условий, ограничений. Для задач СРП таковыми условиями, в первую очередь, являются

непосредственно уравнения в частных производных, содержащие искомое управление. В главе 5 предлагается процедура (алгоритм) определения градиента как производной Фреше от неявно заданного целевого функционала. Такая процедура представляет собой одну из модификаций метода множителей Лагранжа. В §3-§6 описываются процедуры определения градиента целевых функционалов для каждой из сформулированных в первой главе задач оптимизации. Техника учета отдельных ограничений либо на управление, либо на состояние СРП рассматривается в последнем параграфе главы 4.

В §2 главы 5 вводится новое понятие управляемости [97], как условной корректности по А.Н. Тихонову задач оптимизации. Показано, что проблема управляемости СРП для рассматриваемого прямого подхода сводится к относительно простой процедуре контроля вида подинтегральной функции целевого функционала и пространственно-временной области определения функционала. В §3-§6 при определении градиентов для задач оптимизации проводится и анализ управляемости.

Последняя глава 6 содержит примеры конкретных численных решений задач оптимизации, сформулированных в первой главе. Примеры включают дифференцируемые и недифференцируемые целевые функционалы, различные ограничения на множество управлений и состояний СРП. Демонстрируются регуляризирующие свойства разработанных экстремальных алгоритмов. Тестовые расчеты подтверждают высокую эффективность полученных алгоритмов минимизации.

1. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Простейшая задача оптимального управления тепловыми процессами

Известно, что передача тепла играет важную роль в различных технологических процессах в том числе и в теории реакторов. Здесь необходимо решать задачи не только о качественном их проектировании, но и о наиболее эффективной эксплуатации, что требует широкого применения средств теории оптимального управления. При этом, во многих случаях необходимо учитывать распределенность параметров оптимизируемых объектов и систем. Вместе с тем пока нет работ, в которых с единых позиций излагались бы решения различных задач оптимального управления тепловыми процессами [43].

В данном параграфе в качестве первой тестовой задачи для различных алгоритмов оптимизации, применительно к процессам теплопереноса, рассматривается задача оптимального управления граничным потоком тепла в линейном, одномерном параболическом уравнении. Данной СРП ставится в соответствие физическая (техническая) ситуация, связанная с простейшим химическим реактором (см. рис. 1.1).

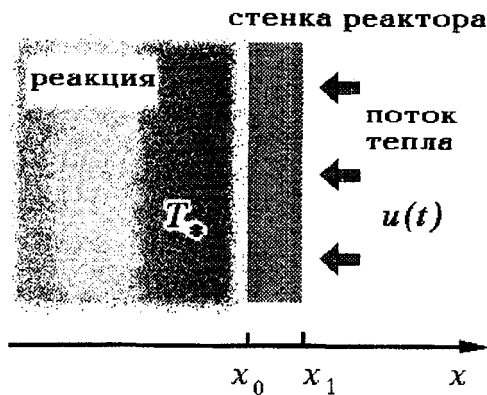


Рис. 1.1. К задаче оптимального управления тепловым потоком в химическом реакторе

Предполагается, что химическая реакция в таком реакторе протекает с известным поглощением тепла $q(t)$. Целью управления является удержание реакции в заданном температурном режиме $T_*(t)$. Значения q и T_* задаются на внутренней поверхности стенки реактора, а управление вводом тепла осуществляется на ее наружной поверхности. При этом процесс теплопередачи описывается следующим уравнением:

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad t, x \in \Sigma = [t_a, t_b] \times [x_0, x_1], \quad (1.1)$$

где T - температура стенки реактора, C , ρ и λ - теплоемкость, плотность и теплопроводность соответственно.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \lambda\frac{\partial T}{\partial t} &= q & t, x \in S' = (t_a, t_b) \times x_0; \\ \lambda\frac{\partial T}{\partial t} &= u & t, x \in S = (t_a, t_b) \times x_1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Начальное условие:

$$T = T_a \quad t, x \in S_a = t_a \times [x_0, x_1]. \quad (1.3)$$

Степень отклонения температуры $T(t, x_0)$ химической реакции от заданной температуры T_* на пространственно-временной области S' можно оценивать одним из двух функционалов:

$$J(u) = \int_{S'} (T - T_*)^2 dt, \quad (1.4)$$

или

$$J(u) = \int_{S'} |T - T_*| dt. \quad (1.5)$$

Задача оптимального управления реактором формулируется следующим образом. Необходимо найти поток тепла $u(t)$ на множестве S , который доставляет минимум функционалу (1.4) или (1.5).

Заметим, что функционал (1.5) недифференцируем. Теория бесконечномерных задач негладкой оптимизации в настоящее время развита недостаточно полно. Конкретные численные решения для подобного рода задач встречаются крайне редко. В настоящей книге уделяется

значительное внимание проблемам негладкой оптимизации, разрабатываются и иллюстрируются условия оптимальности и алгоритмы минимизации для функционалов типа (1.5).

По техническим соображениям в процессе управления реактором может присутствовать ограничение на допустимый ввод тепла, например, возможно

$$u \in U_{\text{ад}}, \quad (1.6)$$

где $U_{\text{ад}}$ - допустимое множество управлений. Такое множество, обычно, представляет собой множество всех функций-управлений $u(t)$, не выходящих за пределы заданного максимального и/или минимального потока тепла, например,

$$U_{\text{ад}} = \{u: u_{\text{min}} \leq u(t) \leq u_{\text{max}}\}.$$

Возможны и другие виды ограничений, накладываемых как на управление, так и на состояние, т.е. на температуру процесса. Например, может иметь место ограничение на минимально допустимую температуру реактора ("незамерзание реактора"):

$$T \geq T_{\text{min}} \text{ на } \Sigma. \quad (1.7)$$

В последнем параграфе главы 4 рассматриваются наиболее типичные ограничения, присутствующие при оптимизации СРП, обсуждаются вопросы их реализации в рамках прямого экстремального подхода. В последней главе демонстрируются тестовые задачи оптимального управления потоком тепла в химическом реакторе при ограничении на допустимое множество управлений (1.6).

Задача оптимального управления (1.1)-(1.4) с квадратичным функционалом рассматривалась многими авторами [24, 43, 57, 61, 75 и др.]. При этом, как правило, основное внимание уделялось получению необходимых условий оптимальности и исследованию вопросов существования и единственности оптимального управления.

В приведенной простейшей постановке данная задача еще позволяет выписать аналитическое выражение для оптимального управления традиционными непрямими методами оптимизации [44]. Однако, поскольку целью настоящей работы является разработка

прямого экстремального подхода, то мы будем исследовать задачи (1.1)–(1.5) численными алгоритмами прямой минимизации целевых функционалов.

Реальные оптимизационные задачи теплопереноса не имеют аналитических решений и традиционные непрямые подходы здесь оказываются чрезвычайно громоздкими и не всегда реализуемыми [44]. С другой стороны, на примере задачи (1.1)–(1.4) во второй главе данной монографии будет показано, что традиционные алгоритмы [83,28] прямой минимизации функционалов также не дают желаемых результатов.

1.2. Идентификация параметров открытых русел

Математическое моделирование в гидродинамике, гидравлике открытых потоков является актуальным. Математические модели здесь применяются для прогнозирования речных течений, паводков, при гидротехническом строительстве и эксплуатации водохозяйственных сооружений в мелиорации, гидроэнергетике, водном транспорте, водоснабжении, рыбном хозяйстве, для управления и оптимизации режимов работы гидротехнических сооружений. Точные математические модели реальных гидравлических объектов могут быть получены только из решения соответствующих задач идентификации.

В настоящее время общепринятой физической моделью, используемой при исследовании одномерных нестационарных открытых потоков, является система уравнений Буассинеска и Сен-Венана. Формально они следуют из общих уравнений движения гидродинамики в предположении, что глубина потока мала по сравнению с длиной волны (приближение "мелкой воды"). Более общими являются уравнения Буассинеска [41], они учитывают внутренние волны. Если рассматривать только поверхностные волны, т.е. пренебречь вертикальным ускорением жидкости, то получаемые при этом уравнения называются уравнениями Сен-Венана.

При решении задач водного хозяйства наиболее целесообразно для моделирования течений использовать одномерную нестационарную квазилинейную гиперболическую систему уравнений Сен-Венана [26, 27,41,109]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2w \frac{\partial Q}{\partial x} + B(c^2 - w^2) \frac{\partial Z}{\partial x} + P_{rr} - g\omega t = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{B} q = 0, \quad t, x \in \Sigma = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1].$$

Состоянием СРП (1.8) является вектор-функция $v(t, x)$ с компонентами $v_1 = Q$ - расход воды и $v_2 = Z$ - уровень воды (см. рис. 1.2). Система Сен-Венана (1.8) в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + d = 0, \quad (1.8')$$

где вектор $v = \begin{bmatrix} Q \\ Z \end{bmatrix}$, матрица $A = \begin{pmatrix} 2w & B(c^2 - w^2) \\ 1/B & 0 \end{pmatrix}$, вектор $d = \begin{bmatrix} P_{rr} - g\omega t \\ -q/B \end{bmatrix}$.

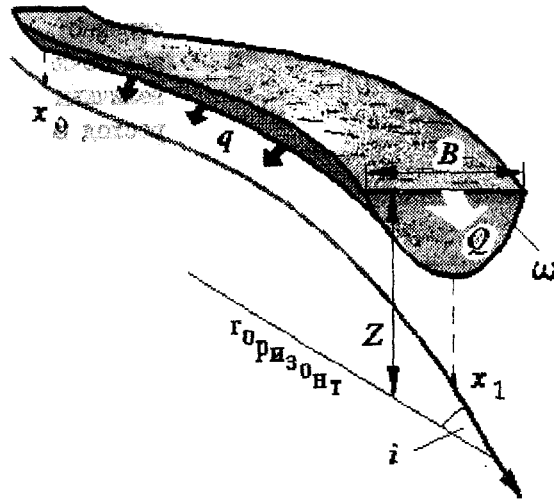


Рис. 1.2. Участок русла

В уравнениях (1.8) $w = Q/\omega$ - скорость потока, $\omega(x, Z)$ - площадь живого сечения, $B(x, Z)$ - ширина потока, $c = (g\omega/B)^{1/2}$ - скорость малых возмущений, i - уклон дна, $q(t, x)$ - боковой распределенный

приток. Член трения

$$F_{fr} = \frac{gQ|Q|}{\omega RC^2}$$

Здесь эмпирический коэффициент Шези

$$C(x, Z) = \frac{1}{u} R^{2.5u^{1/2} - 0.19 - 0.75R^{1/2} (u^{1/2} - 0.1)},$$

где $u(x)$ – коэффициент шероховатости, характеризующий трение воды о ложе русла, $R = \omega/\chi$ – гидравлический радиус, $\chi(x, Z)$ – смоченный периметр поперечного сечения русла.

Как показывает опыт моделирования стоков [12, 52, 53 и др.], возможности использования математических моделей на практике определяются, в основном, точностью задания входящих в эти модели параметров, отражающих индивидуальные свойства каждого конкретного русла – форму поперечного сечения, уклон дна, шероховатость, боковой распределенный приток. Значения этих параметров, позволяющие проводить расчеты с заданной точностью, могут быть найдены только в результате параметрической идентификации.

Принципиальная схема алгоритма идентификации приведена на рис. 1.3.

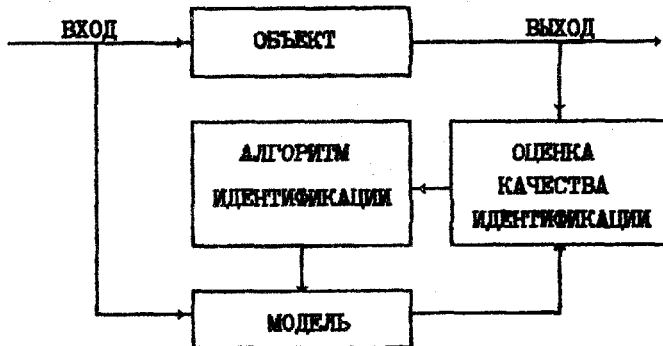


Рис. 1.3. Схема идентификации.

Качество идентификации параметров стока можно оценивать по расхождению экспериментально наблюдаемых Z_0 и рассчитываемых Z по модели (1.8) уровней воды в двух x_0, x_1 или одном x_1 граничном створе русла [8, 97, 99]. При этом критерий качества параметрической идентификации СРП (1.8) принимает вид функционала:

$$J = \int_{S'} (Z - Z_0)^2 dt, \quad (1.9)$$

или

$$J = \int_{S'} |Z - Z_0| dt, \quad (1.10)$$

где S' - пространственно-временная область наблюдений за уровнем воды в русле.

Для уравнений Сен-Венана, параметром, подлежащим первоочередной идентификации, является коэффициент шероховатости $u(x)$. Он характеризует диссипацию энергии в пристеночной зоне. Прямым измерениям коэффициент шероховатости не поддается, в то же время он весьма существенно влияет на точность моделирования стоков. Так, например [63], расчеты течения воды на участке реки Северский Донец длиной 60 км с шероховатостью, рекомендуемой по описательным таблицам, могут приводить к погрешностям в значениях глубины воды в русле до двух метров. Такое моделирование ни в какой мере нельзя считать приемлемым.

Коэффициент шероховатости зависит от множества факторов [109]: поверхностной шероховатости ложа, степени зарастания русла, неоднородности формы русла, заиления и размыва, размеров русла, местных сопротивлений, уровня и расхода воды и т.д. В настоящее время задача определения гидравлических сопротивлений крупных каналов остается нерешенной [4].

Кроме физических факторов, определяющих значение коэффициента шероховатости, а также других отыскиваемых параметров, существуют факторы и иной природы. Ими являются [99]: различные допущения и приближения структуры уравнений стока (1.8), точность наблюдения состояния потока для идентификации искоемых параметров, точность задания неидентифицируемых параметров, точность вычислительных методов для прямого решения СРП (1.8), точность методов идентификации.

Из всего сказанного следует, что идентифицированные величины всегда содержат погрешности структуры уравнений (физической модели), наблюдений и вычислений. Поэтому, значения идентифицированных параметров математической модели называют модельными. Они не только не могут, но и не должны в точности совпадать с экспериментально наблюдаемыми параметрами, для которых возможны прямые измерения.

Удовлетворительные результаты математического моделирования стоков могут быть получены только на основе соответствующих модельных, а не экспериментальных значений параметров стока. Главная причина этого кроется в том, что модельные значения выбираются по принципу обратной связи состояния потока с определенными параметрами-коэффициентами СРП (1.8). Это означает, что задачи идентификации являются обратными.

Большинство обратных задач являются некорректными. Именно это обстоятельство в течение длительного времени сдерживало развитие методов их решения. В настоящей работе задача идентификации распределенного коэффициента шероховатости $u(x)$ решается как задача оптимального управления: необходимо найти функцию $u(x)$ в СРП (1.8), доставляющую минимум функционалу (1.9) или (1.10). В задачах идентификации ограничения на управление отсутствуют.

При этом проблема корректности задачи идентификации превращается в проблему управляемости. Данная проблема исследуется во втором параграфе главы 5. Как будет показано далее, в конечном итоге, условия управляемости для рассматриваемой задачи гидравлики определяют необходимое время наблюдений уровня Z для идентификации коэффициента шероховатости $u(x)$ распределенного по длине русла.

1.3. Оптимальное управление работой гидротехнических сооружений

Такие области хозяйствования человека как гидроэнергетика, мелиорация, водный транспорт, водоснабжение, рыбное хозяйство и др. основаны на передаче и использовании больших объемов воды. Для эффективного управления водными ресурсами строятся искусственные каналы и различные гидротехнические сооружения на каналах и реках. Для управления передачей воды применяются насосные станции и перегораживающие сооружения.

Значительной экономии воды, электроэнергии и снижения эксплуатационных затрат можно добиться за счет оптимального управления работой гидротехнических сооружений. Для примера можно указать, что на канале Днепр-Донбасс только оптимизацией водоподачи можно сократить потери воды на 12% [65].

Характерной чертой рассматриваемых объектов является динамичность происходящих в них процессов, обусловленная изменениями режимов работы и водопотребления, а также различными аварийными ситуациями. Основная их особенность - нестационарное движение воды в открытых руслах каналов и рек. Для описания течений воды здесь используют уравнения Сен-Венана (1.8). Проблемы построения математических моделей на основе данных уравнений были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Из всего многообразия задач управления, возникающих в водохозяйственных комплексах, можно выделить важнейшую - управление насосными станциями. В монографии [7] рассмотрен ряд вариационных задач оптимизации режимов работы насосных станций с целью минимизации топливноэнергетических ресурсов электростанций и насосных станций. В данной монографии рассматривается задача оптимизации режимов работы насосных станций с целью наилучшего удовлетворения запросов потребителей воды при наличии различных ограничений.

При выборе схемы регулирования водоподачи необходимо учитывать режимы работы потребителей и технические возможности насосных станций. На выбор схемы большое влияние оказывает характер водопотребления. Так, если расход воды изменяется произвольно, а канал должен при любом водозаборе обеспечить запросы потребителей и пропустить плановый транзитный объем воды, то целесообразно применять схему регулирования по начальному створу [19], т.е. на границе x_0 канала, как это показано на рис. 1.4. Здесь водоподачу можно регулировать путем стабилизации уровня Z в нижнем створе канала. Процесс регулирования водоподачи сводится к коррекции расхода воды в соответствии с отклонениями уровня Z от номинального значения Z_n . Далее рассматривается именно такая задача управления.

В этом случае функцией управления $u(t)$ является расход воды $Q(t, x_0)$ на левой границе x_0 канала, т.е. управление содержится в граничных условиях уравнений Сен-Венана:

$$Q=Q_0, \quad t, x \in S = (t_a, t_b) \times x_0 \quad (1.11)$$

- для правой границы русла и для левой границы -

$$Q=Q_1, \quad t, x \in S' = (t_a, t_b) \times x_1, \quad (1.12)$$

где $Q_1(t)$ - расход воды, задаваемый работой потребителя.

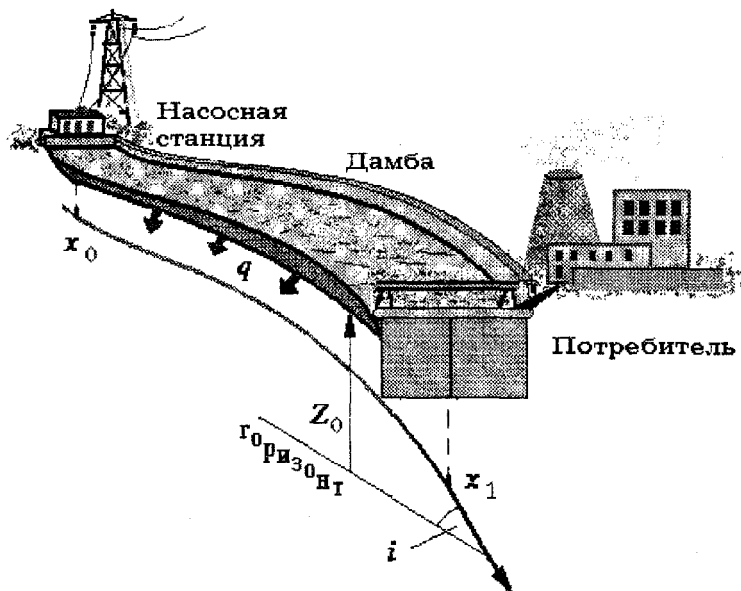


Рис. 1.4. К задаче оптимального управления режимом водоподачи на насосной станции

Состояние потока в течение всего времени управления работой канала определяется уравнениями Сен-Венана (1.8) с граничными условиями (1.11), (1.12) при заданном начальном состоянии потока:

$$Z=Z_0, \quad Q=Q_0, \quad t, x \in S_0 = t_a \times [x_0, x_1]. \quad (1.13)$$

Целью управления является удержание уровня воды в нижнем створе канала как можно ближе к номинальному значению Z_n при

произвольном режиме работы потребителя Q_1 , т.е. необходимо минимизировать следующий функционал:

$$J(u) = \int_{s'} (Z - Z_n)^2 dt. \quad (1.14)$$

Каждая насосная станция состоит из нескольких насосных агрегатов, между которыми распределяют объем подаваемой воды. Мощность насосной станции ограничивается суммарной мощностью входящих в нее насосных агрегатов. Произвольная работа потребителя в нижнем створе канала может приводить к требованию мгновенных значительных расходов воды на насосной станции в верхнем створе. Такие расходы могут быть недоступными для имеющихся насосных агрегатов. Поэтому оптимизация режимов работы насосной станции должна производиться при наличии ограничения на максимально допустимый расход воды, т.е. при ограничении типа (1.6):

$$u \in U_{ad}.$$

где U_{ad} - допустимое множество управлений, такое, что:

$$U_{ad} = \{u: u(t) \leq u_{max}\}. \quad (1.15)$$

Кроме ограничения на допустимое множество расходов (1.15) может присутствовать ограничение в виде изопериметрического условия:

$$\int_s u dt = K, \quad (1.16)$$

где K - изопериметрическая постоянная, например, запланированная суточная транзитная подача воды через канал для удовлетворения нужд всех потребителей, подключенных к рассматриваемому каналу. Ограничение (1.16) обеспечивает транспортировку (подачу в верхний створ) заданного количества K воды за промежуток времени от t_a до t_b при любом режиме работы основного потребителя в нижнем створе канала.

Кроме ограничений (1.15), (1.16) могут присутствовать ограничения на характер включения насосных агрегатов, т.е. на класс

функций $u(t)$. Дело в том, что на большинстве насосных станций насосные агрегаты не могут плавно менять свою мощность в течение всего времени управления. Частые включения, выключения насосов приводят к их быстрому выходу из строя. Поэтому реальные режимы работы насосных станций - это включение и выключение группы насосных агрегатов разной мощности в заданные моменты времени, обычно, несколько раз в сутки.

Указанные условия работы насосных агрегатов требуют искать оптимальные режимы работы насосной станции в классе кусочно-постоянных функций с заданными моментами времени возможных переключений. Подобный класс управлений в принципе максимума называется игольчатым. Здесь функция $u(t)$ считается закрепленной, в частности, нулевой, на множествах $S_i = (t_i, t_i + \Delta t_i) \times x_0$ и незакрепленной, но постоянной на остальных множествах $S_j = (t_j, t_j + \Delta t_j) \times x_0$, где $S_i + S_j = S$. Таким образом, ограничение на класс управлений принимает вид:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{на } S_i, \\ u_j & \text{на } S_j, \end{cases} \quad (1.17)$$

где u_j - набор постоянных управлений, оптимальные значения которых необходимо найти.

Как уже упоминалось ранее, произвольная работа потребителя в нижнем створе может приводить к требованию подачи значительных расходов воды на насосной станции в верхнем створе. Даже при работе насосной станции с ограничением (1.15) такие расходы могут приводить к повышению уровня воды в канале выше Z_{\max} предельно допустимого по техническим условиям безопасной эксплуатации канала. Такое управление может приводить к аварийным ситуациям - к переливу воды через края канала, к разрушению насыпей и дамб канала с последующим затоплением прилегающих территорий. Естественно, что такое "оптимальное" управление ни в коей мере не может быть допустимым.

Для контроля подобной ситуации и предотвращения работы канала в недопустимых аварийных режимах необходимо вводить ограничение на состояние потока. Необходимо требовать, чтобы уровень воды по длине всего канала не превышал максимально допустимое значение $Z_{\max}(x)$ или максимально допустимую глубину H_{\max} , возможно $H_{\max}(x)$, т.е. необходимо

или

$$\left. \begin{aligned} Z(t,x) &\leq Z_{\max}(x) \\ H(t,x) &\leq H_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Глубина потока определяется как $H(t,x) = Z(t,x) - Z_0(x)$, где $Z_0(x)$ - уровень линии дна канала, который, в свою очередь, связан с уклоном дна в уравнениях Сен-Венана следующим дифференциальным соотношением:

$$t = dZ_0/dx.$$

Перечисленные ограничения (1.15)-(1.18) на работу насосной станции относительно просто реализуются в рамках рассматриваемого прямого экстремального подхода.

1.4. Оптимальное управление охлаждением непрерывного стального слитка

Разливка стали и ее затвердевание являются завершающими звеньями в цепи металлургического процесса. С ними связана совокупность многих явлений физического, химического, механического характера, формирующих стальной слиток. Условия протекания указанных явлений составляют технологический режим разливки и затвердевания стали. Одним из таких режимов является разливка стали в кристаллизаторы непрерывного действия, определяющая возможность непрерывного ведения процесса формирования слитка. Освоение способа непрерывного литья стали являлось одним из наиболее примечательных достижений современной металлургической техники.

На рис. 1.5 приведена принципиальная схема установки для непрерывного вертикального литья металла. Жидкий металл заливается сверху в кристаллизатор - 1 (первичный охладитель), где формируется твердая корка вокруг слитка - 2. Во вторичном охладителе - 3 слиток затвердевает по всему объему и остывает до требуемой температуры в нижней части на выходе из машины непрерывного литья. При движении слитка от кристаллизатора ко вторичному охладителю

внутри слитка остается лунка жидкого металла, которая по мере продвижения вниз затвердевает, проходя двухфазное жидкокристаллическое состояние.

Хотя сейчас в установках непрерывной разливки получают слитки более высокого качества по сравнению со старым способом разливки в изложницы, задача полного устранения различных дефектов, прочности непрерывных слитков остается пока нерешенной.

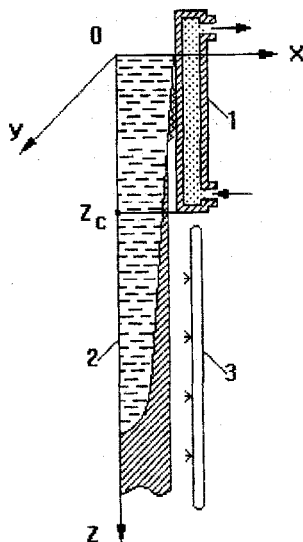


Рис. 1.5. Принципиальная схема установки непрерывного вертикального литья металла:
1 - кристаллизатор;
2 - слиток;
3 - вторичный охладитель

Проблема получения качественных непрерывных слитков при затвердевании металлических расплавов является весьма актуальной. В настоящее время стоит задача определения оптимальных условий затвердевания слитков с целью управления формированием их структуры и свойств, которые связаны со многими сложными физическими и химическими явлениями [2,20,45,55,71,82,86 и др.]. Роль температурных напряжений при решении проблемы качества слитка является одной из определяющих [45,87]. При этом важное значение приобретает вопрос правильного выбора режима охлаждения затвердевающего слитка. В настоящее время стоит задача определения оптимальных условий затвердевания слитков с целью управления форми-

рованием их структуры и свойств [2,20,45,55,71,82,86-88 и др.].

Основным физическим параметром, в значительной мере предопределяющим структуру и свойства затвердевающего металла, является температура. От ее распределения в расплаве зависят поля концентраций различных примесей, размеры и строение переходной зоны твердого состояния, усадка, распределение термических напряжений. Таким образом, распределение температуры и ее градиентов в огромной степени влияют на формирование структуры и свойств литого металла. Поэтому критерии оптимальности, связанные с температурным полем затвердевающего расплава, являются первичными.

В монографии Соболева В.В. и Трефилова П.М [86] приводятся и обсуждаются первичные и вторичные критерии оптимальности процесса затвердевания слитка. Первичные критерии, представляют собой функционалы температурного поля, а вторичные критерии - связаны с полями концентраций, давления и термических напряжений. Первичные критерии оптимальности являются базовыми, каждый из них выражает определенное требование к тепловым режимам затвердевания слитков.

Полная задача оптимизации температурных полей по управляющим факторам, в частности, по граничным условиям, в настоящее время не решена. Основная трудность для традиционных в теплофизике методов исследования процессов заключается в обратном характере задач оптимизации. Известно [93, 94], что такие задачи некорректны в классическом смысле, они требуют применения специальных алгоритмов регуляризации. Авторы монографии [86] отмечают: "Поэтому нашей целью является фактически определение, строго говоря, не оптимальных, а по возможности рациональных режимов охлаждения и затвердевания слитков при непрерывном литье".

В работе [31] впервые для задач оптимизации формирования непрерывных слитков применен прямой экстремальный подход. Поставлена и решена задача оптимального управления теплоотводом во вторичном охладителе по одному из функционалов, рекомендованному в работе [86]. Полученные первые результаты подтверждают целесообразность и эффективность применения прямого экстремального подхода к задачам оптимизации процессов затвердевания слитков.

Перейдем к конкретной постановке задачи оптимального управления теплофизическими процессами при формировании непрерывного стального слитка.

Согласно работе [86], для снижения термонапряжений и предот-

вращения образования трещин, необходимо уменьшать градиенты температур по толщине корочки слитка, т.е. необходимо минимизировать следующий функционал:

$$J = \int_{\Phi} \int_{\Psi} \int_{Z_{ab}} (T_x^2 + T_y^2)^{1/2} dx dy dz, \quad (1.19)$$

где x, y - горизонтальные координаты, z - вертикальная координата, выходящая из начала слитка и направленная вниз по его оси (см. рис. 1.5), Z - нижняя граница слитка, Φ - поперечная координата линии солдуса в сечении слитка, компоненты градиента температур $T_x = \frac{\partial T}{\partial x}$, $T_y = \frac{\partial T}{\partial y}$. Функционал (1.19) является первым в ряду первичных критериев оптимальности согласно классификации [86].

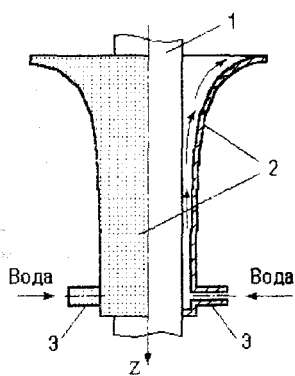
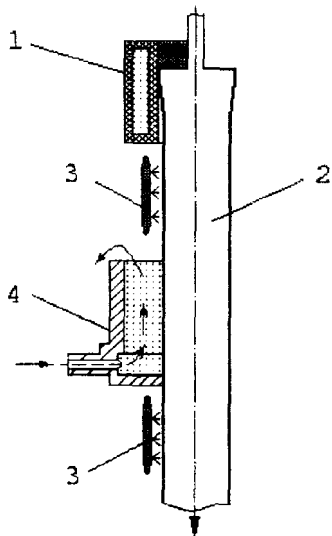
Основным фактором, влияющим на значение критерия оптимальности (1.19), является величина теплоудельности при вторичном охлаждении слитка. Остановимся немного подробнее на технической стороне реализации процедуры вторичного охлаждения.

На сегодняшний день различают несколько способов теплоотвода - воздушный, водяной струйный и форсуночный, водяной кессонный. Последний способ считается наиболее перспективным [86]. Здесь охладитель подается снизу в зазор между кожухом и слитком. В результате этого поверхность слитка охлаждается равномерно по периметру его поперечного сечения проточным теплоносителем, протекающим в зазоре между слитком и кожухом в направлении, противоположном его движению.

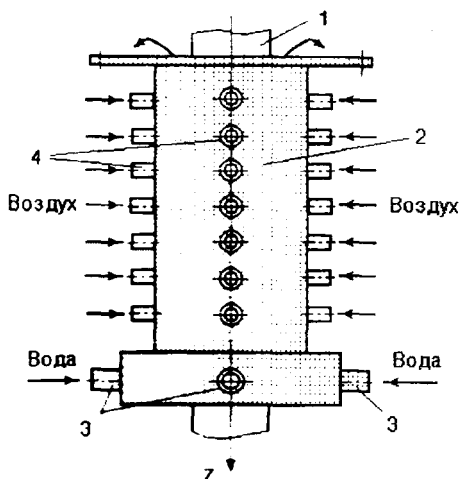
На рис. 1.6 изображается принципиальная схема вторичного охлаждения с различным способом теплоотвода. Здесь цифры означают: 1 - кристаллизатор; 2 - слиток; 3 - форсуночное охлаждение; 4 - кессонное охлаждение. Температуру и вид охлаждающего агента выбирают, исходя из результатов расчетов.

Комбинированные способы теплоотвода применяются для создания различного оттока тепла по длине формирующегося слитка. Конкретный вид функции $u(z)$ оттока тепла из зоны вторичного охлаждения определяется условием минимума критерия оптимальности (1.19). Для того, чтобы реализовать ту или иную функцию $u(z)$ отвода тепла конструируют сложные кессонные охладители, например, рис. 1.7, а. Возможна даже замена проточной воды на проточную водо-воздушную смесь - рис. 1.7, б.

Рис. 1.6. Принципиальная схема
 вторичного охлаждения с
 разным способом теплоотвода:
 1 - кристаллизатор;
 2 - слиток;
 3 - форсуночное охлаждение;
 4 - кессонное охлаждение



a).



b).

1.7. Кессонное вторичное охлаждение:

- 1 - слиток; 2 - кожух; 3 - патрубки для подачи воды;
 4 - патрубки для подачи воздуха

Приведенные конструкции вторичного охлаждения показывают, что современные технические средства позволяют управлять оттоком тепла при формировании непрерывного слитка. Это означает, что минимум функционала (1.19) можно и целесообразно отыскивать в классе, практически, произвольных, а не только постоянных или кусочно-постоянных функций.

Теперь перейдем к описанию процесса теплопереноса в слитке, который позволит нам связать управление $u(z)$ с критерием оптимальности (1.19). Эксперименты и расчеты показывают, что характерное время переходного процесса, определяемое временем установления стационарных условий кристаллизации непрерывных слитков, много меньше продолжительности цикла вертикального непрерывного литья [88]. Поэтому для исследования тепловых режимов затвердевания рассматриваемых слитков следует решать стационарную тепловую задачу. При непрерывном литье конвективный теплоперенос вдоль оси слитка z на полтора-два порядка превышает кондуктивный осевой перенос тепла. Вследствие этого при анализе стационарных температурных полей членом со второй производной T по z в уравнении теплопроводности можно пренебречь. Также полагается, что влияние термоконвекции вынужденных циркуляционных потоков от воздействия струи и диффузия в твердой фазе пренебрежимо малы или достаточно точно учитываемы эффективными значениями теплоемкости и теплопроводности слитка [88].

Актуальной задачей технологии непрерывного литья является получение качественных стальных слитков круглого сечения, используемых в качестве заготовок для трубо- и колесопрокатного производства. При этом слиток и происходящие в нем процессы являются осесимметричными. Принципиальная схема тепловой обработки и фазовых состояний цилиндрического затвердевающего слитка приведена на рис.1.8, а уравнение теплопереноса, при вышеуказанных допущениях, имеет вид [88]:

$$C\rho W \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{на } \Sigma = \{r, z: 0 < r < R, 0 < z < Z\}, \quad (1.20)$$

где $T(r, z)$ - температура слитка, W - скорость литья (скорость вытягивания слитка), $\rho(T)$ - плотность слитка, $C(T)$ и $\lambda(T)$ - эффективные теплоемкость и теплопроводность, которые в жидкой, двухфазной и твердой зонах равны:

$$\left\{ \begin{array}{llll} \rho = \rho_l, & C = C_l, & \lambda = \lambda_l, & : T > T_L, \\ \rho = (\rho_l + \rho_s)/2, & C = (C_l + C_s)\xi - w \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right), & \lambda = (\lambda_l + \lambda_s)/2, & : T_s < T < T_L, \\ \rho = \rho_s, & C = C_s, & \lambda = \lambda_s, & : T < T_s. \end{array} \right.$$

Здесь малые индексы l и s обозначают известные табличные значения параметров, соответственно, для жидкого и твердого состояния слитка. Температуры T_s и T_L - температуры солидус и ликвидус, т.е. температуры начала и конца плавления, для стали $T_s = 1768\text{K}$, $T_L = 1798\text{K}$. Величина w - скрытая теплота кристаллизации. Переменная ξ - доля твердой фазы, определяемая по уравнению для неравновесного рычага [70,88]:

$$\xi = 1 - \left[\frac{T_0 - T}{T_0 - T_L} \right]^{-\frac{1}{1-k}}, \quad (1.21)$$

где k - равновесный коэффициент распределения примеси, T_0 - температура заливки металла в кристаллизатор. Параметр ξ используется для определения фазового состояния стали в заданной точке слитка. При $\xi \leq 0$ металл находится в жидком состоянии, при $0 < \xi < 0.95$ - в двухфазном, при $\xi \geq 0.95$ - в твердом.

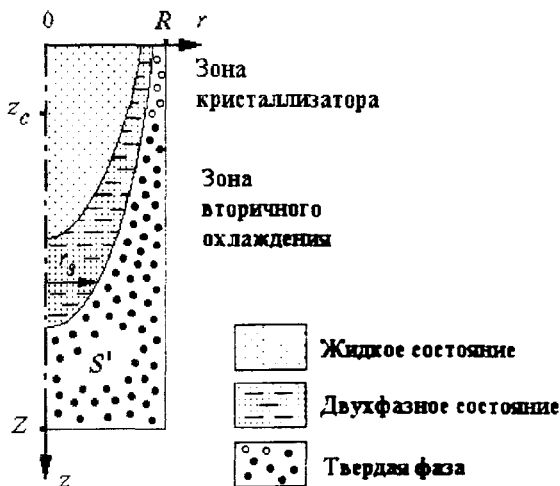


Рис. 1.8. Схема непрерывного цилиндрического слитка

Под эффективной теплоемкостью и теплопроводностью подразумеваются такие C и λ , при которых без учета термоконвекции, вынужденных циркуляционных потоков и диффузии математическая модель (1.20) является достаточно точной. Введение эффективных параметров позволяет существенно упростить математическую модель и облегчить построение вычислительных алгоритмов, поскольку при этом нет необходимости рассчитывать гидродинамику и диффузию в слитке [88,70].

Граничные условия для СРП (1.20) имеют вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad T \Big|_{\substack{\alpha \leq r \leq R \\ z=0}} = T_0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\gamma(T-T_c), \\ \left. \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right|_s = u, \quad S = \{r, z: r=R, z_c < z < Z\}, \quad (1.22)$$

где z_c - нижняя граница кристаллизатора (см. рис. 1.8), T_c - температура кристаллизатора, γ - коэффициент теплопередачи в зоне кристаллизатора, $u(z)$ - отток тепла в зоне вторичного охлаждения.

Целевой функционал (1.19) в цилиндрической системе координат принимает вид:

$$J = \int_{S'} \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| d\Sigma, \quad d\Sigma = r dr dz, \quad (1.23)$$

где S' - область твердой фазы слитка в зоне вторичного охлаждения (черные точки на рис. 1.8). Функционал (1.23) недифференцируем. Аналогично работам [31,103,122] мы будем исследовать задачу оптимизации относительно дифференцируемой квадратичной формы критерия (1.23), т.е. далее мы будем рассматривать целевой функционал

$$J = \int_0^R \int_0^Z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \theta(r-r_s) \theta(z-z_c) r dr dz, \quad (1.24)$$

где θ - функция Хевисайда, r_s - радиус границы твердой фазы.

Таким образом, задача оптимизации процесса затвердевания непрерывного слитка и, в частности, оптимизация полей температур слитка формулируется следующим образом. Необходимо найти

оптимальный поток тепла $u(z)$, в граничном условии (1.22), который минимизирует термонапряжения в форме функционала (1.24). Заметим, что СРП (1.20)–(1.22), описывающая установившийся процесс теплопередачи, имеет эллиптический тип относительно радиальной координаты r .

Очевидно, что минимум функционала (1.24) достигается при $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. Поскольку краевым условием для этого дифференциального соотношения для каждого z от конца кристаллизатора и до конца двухфазной лунки является температура $T(r_s, z) = T_s$, то минимизация функционала (1.24) обеспечит оптимальный тепловод $u(z)$, при котором исчезает твердая фаза. Слиток перейдет в двухфазное состояние. Это означает, что целевой функционал (1.24) обязательно должен минимизироваться при некоторых дополнительных ограничениях. Заметим, что данный вопрос ранее никем в литературе не поднимался и не обсуждался. Такое обстоятельство объясняется традиционной подменой задач оптимизации полей температур задачами подбора рациональных режимов охлаждения.

Введем ограничение на температуру слитка на выходе из установки непрерывного литья. Это означает, что мы будем иметь ограничение типа (1.7) на состояние СРП в форме:

$$T \Big|_{0 < r < R} \leq T_{\max} \quad (1.25)$$

Согласно техническим условиям литья максимальная температура T_{\max} выхода слитка должна быть приблизительно равна 1100К. Техника учета ограничений типа (1.7), (1.25) обсуждается в главе 4.

2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Классическое вариационное исчисление

Сформулируем в общей форме задачу оптимального управления для СРП. Пусть $u(\tau)$ – управление, где пространственно-временной аргумент $\tau \in S$. Функция управления $u(\tau)$ определяет функцию состояния $v(\tau)$ некоторой СРП на пространственно-временном множестве Σ , причем $S \subseteq \Sigma$. Саму СРП запишем в символическом операторном виде:

$$D_{\tau}(\tau, v, u)v = 0, \quad \tau \in \Sigma, \quad (2.1)$$

где D_{τ} – дифференциальный оператор по пространственно-временным переменным, включающий граничные условия и свободные члены. Если СРП описывается несколькими уравнениями, то ее состояние v – это вектор-функция.

Цель управления задается функционалом:

$$J(u) = \int_{S'} I(v, u) \rightarrow \inf, \quad (2.2)$$

где $I(v, u)$ – заданная функция аргумента v и, возможно, u . Управление u может принадлежать ограниченному допустимому множеству U_{ad} . Пространственно-временное множество S' определения целевого функционала в общем случае не совпадает ни с S , ни с Σ .

Задача оптимального управления формулируется следующим образом. Найти управление $u = u_*$, доставляющее минимум целевому функционалу J и удовлетворяющее некоторому условию в виде СРП.

В данном параграфе мы рассмотрим основные идеи, развитые в рамках классического вариационного исчисления для решения сформулированной оптимизационной задачи. При обсуждении общих идей, для избежания громоздких выкладок, будем считать, что $S = S' = \Sigma$.

В работах [58, 92, 111, 113] применяются методы классического вариационного исчисления для стационарных гиперболических систем. В работах [7–10] имеется развитие данных идей на нестационарные гиперболические системы, а в работах [115, 116] – на нестационарные параболические системы. В рассматриваемом подходе задачу минимизации (2.2) при условии (2.1) преобразуют к задаче безусловной

минимизации при помощи множителей Лагранжа:

$$J = (f_0, I) + (f, D_\tau v) \longrightarrow \inf, \quad (2.3)$$

где $f_0, f(\tau)$ – множители Лагранжа. Крутые скобки означают следующее скалярное произведение:

$$(a, b) = \int_{\Sigma} \sum_{\tau} a_{\tau} b_{\tau} d\Sigma,$$

где суммирование производится по компонентам перемножаемых вектор-функций a и b . Если a, b – скаляр-функции, то знак суммирования отсутствует.

Формализм подхода требует включать в функционал (2.3) все условия, относящиеся к СРП и управлению, что может приводить к излишне громоздким выкладкам. Возможное ограничение $u \in U_{ad}$ при помощи соответствующих множителей Лагранжа включается в функционал (2.3) и отдельно в явном виде не присутствует. Полученный функционал требует безусловной минимизации на всем пространстве управлений.

В рассматриваемом подходе НУО – это стационарность функционала, т.е. первая вариация функционала (2.3) должна обращаться в ноль при оптимальном управлении $u = u_*$:

$$\delta J = (J_v, \delta v) + (J_u, \delta u) = 0, \quad u = u_*. \quad (2.4)$$

Дифференциальные выражения $J_v(\tau, v, u, f)$, $J_u(\tau, v, u, f)$ представляют собой некоторый аналог уравнения Эйлера.

Если выражение J_v приравнять нулю, то мы получим сопряженную задачу для множителя Лагранжа f :

$$J_v \equiv I_v + D_\tau^* f = 0, \quad \tau \in \Sigma, \quad (2.5)$$

где D_τ^* – дифференциальный оператор, сопряженный к D_τ , $I_v = \partial I / \partial v$. В данном подходе всегда принимается $f_0 = 1$. Для множителя f , удовлетворяющего уравнению (2.5), НУО (2.4) принимает вид:

$$J_u \equiv I_u + E_\tau^* f = 0, \quad u = u_*. \quad (2.6)$$

где E_T^* - некоторый линейный оператор, возможно, дифференциальный,
 $I_u = \partial I / \partial u$.

Если $u \neq u_*$, то $J_u \neq 0$. В рассматриваемом подходе выражение J_u называют невязкой. По степени неравенства нулю невязки организуется итерационная коррекция управления по алгоритму:

$$u^{k+1} = u^k \pm b J_u^k, \quad b > 0. \quad (2.7)$$

Знак \pm уточняется в процессе минимизации, т.к. условие (2.6) - это необходимое условие экстремума, а не минимума. Число b , обычно, принимают постоянным для всех итераций k .

В отличие от классического вариационного исчисления в задачах с СРП НУО второго порядка и ДУО вообще не исследуются. Задача управления (2.1), (2.2) всегда считается гладкой. Алгоритм минимизации (2.7) совпадает с наилучшим вариантом градиентного метода, где параметр шага b задается на первой итерации и далее никак не корректируется. Известно [28,77,100], что такой градиентный метод обладает крайне низкой скоростью сходимости и не гарантирует реализацию НУО (2.6).

2.2. Принцип максимума Понтрягина

В конце 50-х годов Л.С. Понтрягиним был выдвинут принцип максимума для задач оптимального управления в обыкновенных дифференциалах [76]. Математическая строгость и глубокая физичность (связь Гамильтониана H с полной энергией системы) сразу же привлекли к себе широкое внимание и заметно снизили интерес к методам классического вариационного исчисления. Более того, стало распространенным мнение, что именно принцип максимума позволил решать задачи оптимизации с ограничениями. Однако это не так, данные задачи с успехом решались и классическими методами еще столетие назад, как это показано в работе [11].

В работах [24,44,85] началось интенсивное распространение принципа максимума на СРП. Однако при этом исчез прежний математический формализм, а вместо Гамильтониана появилась некоторая безымянная функция

$$\mathfrak{H} = \int_{\sigma} I + fF, \quad \tau \in \Sigma, \quad f_{\sigma} < 0, \quad (2.8)$$

где $f(\tau)$ – сопряженная переменная, $F = D'v - D_{\tau}v$. Здесь D' – оператор какой-либо производной, например, $-\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial x \partial y$ и т.д. В классическом принципе максимума $D'v$ – это полная производная dv/dt , а F – свободный член дифференциального уравнения или вектор свободных членов, если состояние v – вектор-функция. В принятых обозначениях обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$D_{\tau}v = D'v - F = \frac{dv}{dt} - F = 0.$$

Любая СРП всегда содержит несколько производных $D'v$ разных по аргументам дифференцирования и, возможно, по порядку дифференцирования.

Таким образом, возникает вопрос, что здесь следует считать функцией \mathfrak{H} ? Теряется физический смысл и однозначность записи функции \mathfrak{H} , а ведь именно через Гамильтониан \mathfrak{H} в классическом принципе максимума определяются сопряженные переменные f . Для того, чтобы получить корректные условия для f необходимо использовать принципы классического вариационного исчисления, а именно, необходимо записать функционал (2.2) в форме, аналогичной (2.3):

$$J = (f_{\sigma}, I) - (f, D'v - F) = - (f, D'v) + \int_{\Sigma} f \mathfrak{H} d\Sigma. \quad (2.9)$$

Теперь для любой производной $D'v$ можно определить соответствующую функцию \mathfrak{H} (2.8) и корректно найти сопряженную систему для переменных f . Обычно принимают множитель $f_{\sigma} = -1$.

После варьирования (2.9) для любой функции \mathfrak{H} получаем сопряженную задачу:

$$f_{\sigma} I_{\nu} - D_{\tau}^* f = 0, \quad \tau \in \Sigma, \quad (2.10)$$

которая при условии $f_{\sigma} = -1$ совпадает с сопряженной задачей (2.5) в подходе принципа классического вариационного исчисления. Заметим, что при этом первая вариация $\delta J = \int_{\Sigma} \delta \mathfrak{H} / \delta u_i \delta u_i d\Sigma = (\delta \mathfrak{H} / \delta u_i, \delta u_i)$, т.е. в данном случае выражение (2.6) для J_{ν} принимает вид $J_{\nu} = \delta \mathfrak{H} / \delta u_i$.

Новым содержательным элементом по сравнению с классическим

вариационным исчислением является следующее НУО:

$$H(\tau, v_*, u_*, f_*) = \max_u H(\tau, v_*, u, f_*), \quad u \in U_{ad}, \quad (2.11)$$

где v_* - оптимальное состояние системы, а f_* - решение сопряженной задачи (2.10) при $v=v_*$. Заметим, что данная форма НУО явно включает ограничение $u \in U_{ad}$. ДУО в общей форме отсутствуют. Отдельные исследования в этом направлении встречаются редко.

"В настоящее время НУО составляют наиболее развитую и совершенную часть теории оптимального управления в целом. Основные результаты вместе с техникой доказательства разработаны здесь для широкого круга задач. Однако следует заметить, что за небольшим исключением вопросы реализации и практического использования необходимых условий для решения задач оптимального управления остались вне поля исследований" [91]. К сожалению, НУО (2.11) нельзя считать руководством к конкретным действиям, в особенности для СРП.

Зачастую оптимальные управления реализуются только в классе кусочно-постоянных функций (игольчатые вариации). Наиболее универсальные методы поиска экстремалей [22,91,30,107] - это методы градиентного спуска типа (2.7) с направлением спуска в виде $\delta H / \delta u$. При наличии ограничения $u \in U_{ad}$ - это методы проекции спуска на допустимое множество. Использование градиентных алгоритмов как в классическом вариационном исчислении, так и в принципе максимума не случайно, поскольку невязка J_u и производная $\delta H / \delta u$ представляют собой ни что иное как градиент ∇J целевого функционала (2.2).

Характерное требование $v = v_*$ в НУО (2.11) может приводить к отрицательным эффектам. Например, в задачах идентификации, синтеза оптимального управления и т.п., где подынтегральная функция целевого функционала (2.2) $I(v_*, u) = 0$, функция $H(\tau, v_*, u, f_*)$ вырождается в тождественный ноль. Здесь приходится вводить понятие "особых управлений" [22,36] и искать решение из условия $v \rightarrow v_*$, при $u \rightarrow u_*$ [84].

"Условие особенности не есть признак вырожденности управления, исключительности ситуации, скорее - это сигнал о том, что задача достаточно сложна и ее нельзя до конца исследовать лишь принципом максимума" [84]. Данное замечание абсолютно справедливо. Оно подчеркивает очередное слабое место принципа максимума.

Таким образом, к недостаткам принципа максимума для СРП

следует отнести следующее: 1 - неоднозначность записи функции Π и отсутствие у нее какого-либо физического смысла; 2 - отсутствие формализма получения сопряженной задачи, если не считать идею (2.9) с возвратом к принципам классического вариационного исчисления; 3 - громоздкость НУО (2.11) и неочевидность его реализации; 4 - наличие особых управлений, не имеющих отношения к задаче управления (2.1), (2.2).

2.3. Вариационные неравенства

Широко распространенным инструментом в исследовании задач оптимального управления СРП является метод вариационных неравенств [61]. Он базируется на достижениях функционального анализа и представляет собой современное развитие классического вариационного исчисления. Теория вариационных неравенств скорее приспособлена к исследованию, чем к решению задач оптимального управления.

В данном подходе НУО допускает явное присутствие ограничения на управление и имеет вид [61,291]:

$$(J_u, \delta u) \geq 0, \quad \delta u = u - u_*, \quad u, u_* \in U_{\text{ад}}, \quad (2.12)$$

где выражение J_u определяется тождеством (2.6) и вычисляется через решение сопряженной задачи (2.5).

Очевидно, что при отсутствии ограничений на управление, либо, если $u_* \in \text{int}U_{\text{ад}}$, вариационное неравенство вырождается в условие (2.6) стационарности функционала. Развитый математический аппарат функционального анализа позволяет глубоко анализировать свойства оптималей. Здесь для СРП был получен ряд интересных теоретических решений [61,105,47], в том числе, для сингулярных (классически некорректных) систем [62].

Подавляющее большинство публикаций посвящены вопросам получения НУО типа (2.12) и исследованию функциональных пространств, содержащих оптимальное управление. Численные методы и некоторые примеры решения именно вариационных неравенств, а не задач оптимального управления, рассматриваются в работе [37]. Основная идея заключается в следующем. Для выражения (2.12) подбирается некоторый функционал $J(\text{explicit } u)$, явно зависящий от

единственного аргумента u , для последующей минимизации на ограниченном множестве U_{ad} .

В качестве алгоритмов минимизации $J(\text{explicit } u)$ предлагаются следующие методы: методы релаксации в конечномерном пространстве после предварительной дискретизации задачи; различные методы проекции градиента и сопряженных градиентов; методы двойственности, в которых при помощи сопряженных переменных p преобразуется минимизируемый функционал к некоторой новой форме и отыскивается оптимальная пара $\{u_*, p_*\}$, что может быть более эффективно, чем в случае предыдущих алгоритмов [66].

Автору настоящей работы известны всего две публикации [117, 118], в которых приводятся численные решения вариационных неравенств в задачах оптимального управления СРП. К сожалению, в данных работах отсутствуют рисунки, демонстрирующие сходимость функций управления к оптимальному значению. Принятые скалярные критерии эффективности методов свидетельствуют лишь об улучшении управления, но не о достижении оптимального значения.

Малое количество публикаций конкретных численных решений в данном подходе, по-видимому, не случайно. Алгоритмы решения здесь оказываются весьма громоздкими и многоступенчатыми. На первом этапе задача условной минимизации целевого функционала $J(u)$ с СРП сводится к требованию решения вариационного неравенства типа (2.12) относительно управления $u \in U_{ad}$. На втором этапе решение вариационного неравенства заменяется задачей минимизации некоторого нового функционала $J(\text{explicit } u)$ (или $J(\text{explicit } u, p)$). Заметим, что вопросы существования такого функционала для произвольных СРП нигде не обсуждаются. И, наконец, на последнем этапе реализуются те или иные численные методы минимизации $J(\text{explicit } u)$, $u \in U_{ad}$.

Алгоритм решения задачи оптимизации становится относительно наглядным только в случае, если функционал $J(\text{explicit } u)$ минимизируется каким-либо градиентным методом. В этом случае отыскивать градиент функционала $J(\text{explicit } u)$ нет необходимости, поскольку он представляет собой выражение J_u , которое уже известно. При этом вся теория решения вариационных неравенств оказывается ненужной, а НУО (2.12) приобретает чисто символический характер.

Подход вариационных неравенств допускает недифференцируемость целевого функционала. Однако недифференцируемость предполагается только для части слагаемых целевого функционала, при этом другая

часть обязательно должна быть дифференцируема [61]. Если же имеет место недифференцируемость всего критерия оптимальности, то НУО вырождается в обычное определение минимума, т.е. оно исчезает.

В общем случае ДУО требуют вычисления вторых производных целевого функционала, что для задач оптимизации СРП может оказаться непреодолимым препятствием из-за громоздкости выкладок. Примеры численных реализаций таких ДУО автору настоящей монографии неизвестны.

2.4. Другие не прямые методы

При обобщении методов оптимизации систем с сосредоточенными параметрами на СРП определенное распространение получили методы динамического программирования [24,44,85] и проблемы моментов [24,56]. Однако их круг применимости существенно более узок по сравнению с ранее рассмотренными методами.

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана – каждая часть оптимального состояния или управления оптимизирует функционал цели для соответствующих начальных и конечных точек. На основе данного принципа строится уравнение Беллмана, которое является НУО. Процедуру получения оптимального управления с помощью уравнения Беллмана следует рассматривать как эвристический прием, позволяющий выделить управления, "подозрительные" на оптимальность.

Хорошо известны успехи, достигнутые в применении этого подхода при исследовании дискретных и сосредоточенных систем. Иная ситуация сложилась к настоящему времени в теории оптимального управления СРП. Трудности здесь заключаются не только в исследовании уравнения Беллмана, но и в получении удовлетворительной формы самого уравнения [44].

Для всех стационарных и большинства нестационарных СРП принцип, аналогичный принципу Беллмана, отсутствует. Число публикаций, связанных с применением методов динамического программирования для СРП, крайне незначительно.

Метод проблемы моментов применим только к линейным СРП, решение которых $u(t,x)$ представимо через функцию Грина. Здесь решение представляется в интегральной по времени форме через

начальные, граничные условия и свободный член, где, обычно, и содержится функция управления. Такое представление записывается через разложение в ряды по системе известных, возможно собственных, функций. После чего, вместо неизвестного состояния $u(t, x)$, подставляется некоторое (оптимальное) значение $u_*(t, x)$, заданное условиями задачи управления в какой-либо момент времени. Коэффициенты при одинаковых функциях разложения дают систему уравнений, разрешимую относительно оптимального управления.

Очевидно, что данный подход применим к очень узкому кругу задач оптимизации СРП. Здесь требуется линейность СРП, наличие аналитического решения и знание оптимального состояния СРП. Все эти условия могут выполняться только в некоторых частных случаях.

Проблемы, связанные с попытками обобщения традиционных методов оптимального управления на СРП, послужили основанием для вывода сделанного А.Н. Красовским в 1968 г. [56]. "Вообще задача об аппроксимации управляемых СРП подходящими конечно-мерными системами представляется весьма важной проблемой, разрешение которой открыло бы новые пути и для теоретического исследования и для конкретного численного решения". С тех пор опубликовано много работ по управлению такими системами. Однако указанная проблема аппроксимации остается по-прежнему актуальной.

Все не прямые методы направлены на отыскание управления-функции, непосредственно удовлетворяющего НУО. "Задача оптимального управления становится практически неразрешимой, если НУО формулируются относительно сложно" [67]. "Применение этих методов в случае бесконечномерных систем натолкнулось на существенные трудности, которые заключались, во-первых, в том, что для таких систем не удалось найти достаточно универсальную формулировку задачи, для которой можно было бы выписать эффективно проверяемые НУО. Во-вторых, для тех случаев, когда НУО были получены, возникали существенные, а подчас, и принципиальные трудности при их практическом использовании для построения оптимального управления" [44]. Данная цитата очередной раз акцентирует внимание на основном недостатке не прямых методов.

Другой недостаток состоит в том, что функция, удовлетворяющая НУО, это всего лишь претендент на право называться решением. "Для того, чтобы убедиться в том, что найденная функция является искомым решением, надо еще проверить удовлетворяет ли она ДУО. Поэтому кажется более естественным строить вычислительные

процедуры, опираясь не на необходимые, а на достаточные условия. Однако все попытки, которые делались в этом направлении, не дали еще сколь-нибудь удовлетворительного результата. Несколько задач, решенных с помощью достаточных условий, демонстрируют скорее изобретательность авторов, а не возможности метода" [67].

Нельзя не заметить, что для численной реализации НУО часто привлекаются одни и те же градиентные алгоритмы, хотя и не всегда явно так называемые. Данные алгоритмы выступают как наиболее универсальный инструмент реализации НУО. Градиент, на основе которого реализуется то или иное НУО, практически всегда, является градиентом целевого функционала задачи управления. Производная J_u , которая неоднократно фигурировала при обсуждении традиционных методов оптимизации, - это и есть градиент целевого функционала ∇J :

$$J_u \equiv \nabla J. \quad (2.13)$$

Последнее обстоятельство ставит под сомнение целесообразность использования непрямых подходов для практического решения задач оптимального управления. Здесь представляется разумным использовать прямой экстремальный подход. Он очень нагляден и относительно просто реализуем. Оптимальное значение управления ищется итерационно в процессе направленного спуска от какого-либо начального приближения в сторону минимума целевого функционала до удовлетворения НУО - равенство нулю градиента. Однако и здесь имеются свои проблемы, которые исследуются в следующем параграфе.

2.5. Экстремальные методы

В данном параграфе мы рассмотрим традиционные методы прямой (непосредственной) минимизации целевых функционалов для СРП. Круг используемых здесь методов не очень широк. В основном - это разнообразные варианты градиентных методов и метод сопряженных градиентов. Они применяются как в бесконечномерной, так и в конечномерной интерпретации. Особенности их применения обсуждаются ниже. В конце параграфа приводится численный пример прямого использования традиционных бесконечномерных методов минимизации

функционалов для простейшей тепловой задачи, описанной в первом параграфе предыдущей главы. Предлагаемый пример наглядно показывает слабые стороны и неэффективность традиционных экстремальных методов.

Перейдем к обсуждению различных способов применения экстремальных алгоритмов к задачам оптимизации СРП.

В большинстве случаев сама СРП не имеет аналитического решения, не говоря уже о какой-либо задаче оптимизации, связанной с ней. При использовании компьютеров для решения таких задач требуется проведение конечноразностных аппроксимаций. Такие аппроксимации могут идти по двум принципиально разным направлениям. Первое - это аппроксимация конечными разностями СРП и некоторых бесконечномерных условий оптимальности на всей пространственно-временной области Σ функционирования системы. При этом на компьютере реализуется соответствующий бесконечномерный экстремальный алгоритм в заданных пространственно-временных точках $t_i \in \Sigma$. Именно такое направление принято в настоящей работе.

Второй путь - это аппроксимация всей задачи оптимального управления конечномерными экстремальными задачами. В этом случае на компьютере реализуются различные конечномерные экстремальные алгоритмы с алгебраическими уравнениями (условиями). Рассмотрим некоторые проблемы, возникающие на этом пути.

1. Пусть для какой-либо нестационарной задачи с динамическим управлением $u(t)$ доказан принцип оптимальности Беллмана: каждая часть оптимального состояния или управления оптимизирует функционал цели для соответствующих начальных и конечных точек. Тогда целевой функционал $J(u)$ на временных шагах t_i может быть заменен набором одномерных функций $J_i(u_i)$ при условии, что начальное состояние на шаге t_i является конечным состоянием для шага t_{i-1} с оптимальным управлением u_{i-1} . В этом случае могут с успехом применяться конечномерные методы минимизации непосредственно для функций $J_i(u_i)$ без привлечения громоздких алгоритмов динамического программирования. Для систем с сосредоточенными параметрами подобный подход в работе [107] реализован методом локальных вариаций.

Для всех стационарных и большинства нестационарных СРП как с динамическим, так и с распределенным управлением принцип, аналогичный принципу Беллмана, отсутствует. В этом случае конечномерная аппроксимация исходной экстремальной задачи приводит к требованию

минимизации одной многомерной функции $J(u)$, $u \in E^n$, где E^n - n -мерное Евклидово пространство.

В работе [67] имеются примеры многомерной минимизации в задачах оптимального управления СРП. Основной вывод автора, касающийся экстремальных алгоритмов, аккумулируется в фразе: "при отыскании экстремума функции, даже в случае малой размерности вектора u , возникают значительные трудности".

2. Локальное изменение в некоторой пространственно-временной точке τ значения функции $u(\tau)$, $\tau \in S \subseteq \Sigma$, в отличие от одной компоненты вектора u , не может изменить значение интегрального критерия качества управления. Значение целевого функционала $J(u)$ может изменять только вариация управления на некотором подмножестве $z \subseteq S$ ненулевой меры. Этот эффект должен отражаться на конструировании конечномерных экстремальных алгоритмов, основанных на дискретном представлении функции $u(\tau)$ на S . Необходимо учитывать не локальное, а множественное (на z) влияние управления u на целевой функционал J . Особенно актуальна данная ситуация для нелинейных СРП, где z может быть соизмеримо с S .

Таким образом, конечномерные экстремальные методы не имеют формального обобщения на дискретное (поточечное) представление функции $u(\tau)$ в задачах оптимального управления СРП. Значения функции $J(u_i)$, $u_i = u(\tau_i)$ в некоторых узлах τ_i конечно-разностной сетки могут оказаться нечувствительными к u_i , либо значения $J(u_i)$ будут определяться не элементами u_i , а их комбинацией, т.е. u_i будут взаимосвязаны. Такие задачи оптимизации не имеют решения.

3. Все методы минимизации имеют следующий алгоритм коррекции управления [28, 51, 77, 83]:

$$u^{k+1} = u^k + b^k p^k, \quad b^k > 0, \quad (2.14)$$

где k - номер итерации, b^k - число, регулирующее глубину спуска вдоль поверхности $J(u)$ в точке $u = u^k$, p^k - направление спуска в точке u^k .

Многие алгоритмы конечномерной минимизации построены на определении b^k , p^k через многократное вычисление функции J . К ним относятся методы, не использующие градиент ∇J и методы оптимальной глубины спуска, где

$$b^k = \arg \min_b J(u^k + bp^k). \quad (2.15)$$

Для вычисления J в задачах оптимального управления СРП такие методы требуют многократного решения СРП на каждой итерации. Заметим, что даже при небольшой размерности дискретного управления $u_i = u(\tau_i)$, $\tau_i \in S$ всегда на Σ имеет место значительная размерность дискретного состояния СРП. Поэтому указанные конечномерные методы для СРП являются весьма дорогим удовольствием с точки зрения компьютерных ресурсов.

4. Необходимо отметить еще одну особенность бесконечномерных задач минимизации, которая заключается в наличии ограничений принципиально новых типов: интегральные ограничения на управление $u(\tau)$, $\tau \in S$ и на состояние СРП $v(\tau)$, $\tau \in \Sigma$, ограничения на производные от u и v и т.п. Возможность обоснованного учета таких ограничений в общем случае при конечномерных подходах представляется сомнительным.

Аппроксимация задач оптимального управления СРП конечномерными экстремальными задачами создает множество проблем: корректность дискретизации бесконечномерного пространства с точки зрения управляемости, удовлетворение условий оптимальности исходной бесконечномерной задачи, сходимость к бесконечномерным решениям, учет всевозможных бесконечномерных ограничений на состояние и управление СРП и т.д.

В прямом бесконечномерном экстремальном подходе имеются проблемы иного характера. Методы, не требующие отыскания производных целевого функционала, здесь принципиально неприменимы, т.к. всегда требуют бесконечно большого числа итераций. Методы второго порядка из-за их громоздкости в реальных расчетах не используют. Методы выбора параметра b^k из условия (2.15) и ему подобных, т.е. требующих многократных вычислений J на каждой итерации, резко снижают эффективность соответствующих алгоритмов минимизации.

Таким образом, значительная часть обширного спектра изящных алгоритмов конечномерной минимизации для задач прямой оптимизации СРП оказывается мало эффективной или вообще непригодной. Рассмотрим вкратце современную ситуацию, сложившуюся при минимизации бесконечномерных отображений. Подавляющее большинство публикаций здесь затрагивает чисто теоретические вопросы: оценка скорости сходимости, устойчивость и т.д. "Классическое представ-

ление о сходимости алгоритмов как об основном содержании теории вычислительных процессов не соответствует требованиям к анализу, которые выдвигает практика" [67]. Данное высказывание иллюстрируется в конце параграфа тестовыми расчетами прямого решения задачи оптимального управления параболической СРП.

При минимизации на открытых множествах, обычно, используют градиентные методы

$$u^{k+1} = u^k - b^k \nabla J^k \quad \text{на } S, \quad b^k > 0. \quad (2.16)$$

При условии (2.15) - это метод наискорейшего спуска (МНС). Заметим, что в бесконечномерных пространствах градиент - это не вектор, а функция, определенная на множестве S . Если отображение J имеет овражный характер, то градиентные алгоритмы обеспечивают плохую (неравномерную на S) сходимость.

Овражность J - это весьма распространенное явление, которое в конечномерном случае объясняется разной чувствительностью функции $J(u)$ к разным компонентам вектора управления u , а в бесконечномерном случае, соответственно, - разной чувствительностью функционала $J(u)$ к локальным значениям функции управления $u(\tau)$ на разных малых подмножествах из S .

Убедиться в существовании оврага у конкретного функционала J можно при помощи градиентного метода (2.16). Если существует такая итерация k и начальное приближение u^0 , что знаки локальных значений функции ∇J^k на части S изменяются, т.е.

$$\text{sgn } \nabla J^k = \begin{cases} -\text{sgn } \nabla J^k & \text{на } z \notin S, \\ \text{sgn } \nabla J^k & \text{на } S \setminus z, \end{cases} \quad (2.17)$$

то функционал J имеет овраг. Такое поведение ∇J^k соответствует повороту направления градиентного спуска вблизи дна оврага. Если $z=S$, то такая итерация соответствует переходу через дно оврага или через минимум отображения J . Подробно вопросы существования оврагов и влияние их на характер минимизации обсуждаются в начале следующей главы.

Для минимизации овражных функционалов обычно используют метод сопряженных градиентов:

$$u^{k+1} = u^k - \delta^k p^k \quad \text{на } S, \quad \delta^k > 0, \quad (2.18)$$

где функция $p^k = \nabla J^k + \|\nabla J^k\|^2 / \|\nabla J^{k-1}\|^2 p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$, а число δ^k выбирается согласно (2.15). Как и градиентные методы, метод (2.18) является методом первого порядка, однако обладает скоростью сходимости близкой к методам второго порядка.

Методы второго порядка в бесконечномерных экстремальных задачах практически не используются, поскольку вычисление вторых производных от J для СРП — это чрезвычайно громоздкая процедура. В дальнейшем все условия оптимальности и алгоритмы будут разрабатываться только на основе первых производных от целевого функционала.

Как показывают тестовые расчеты [32, 100, 116] при минимизации овражных функционалов традиционные методы, включая метод сопряженных градиентов, оказываются мало эффективными. Практическая сходимость алгоритмов не обеспечивает сходимость в пространстве управлений к точному решению за значительное число итераций.

В качестве иллюстрации ограниченных возможностей традиционных бесконечномерных экстремальных методов, рассмотрим относительно простую задачу оптимального управления потоком тепла в химическом реакторе [32].

В данном примере СРП — это одномерное линейное нестационарное параболическое уравнение, описывающее изменение температуры $T(t, x)$ в стенке реактора в зависимости от потока тепла $u(t)$ на внешней поверхности x_1 стенки. Подробное описание постановки данной задачи обсуждалось в §1 предыдущей главы.

Реакция протекает с известным поглощением тепла $q(t, x_0)$ на внутренней поверхности стенки реактора. При этом реакция должна удовлетворять оптимальному температурному режиму $T_*(t, x_0)$, т.е. необходимо найти управление $u(t)$, минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{S'} (T - T_*)^2 dt. \quad (2.19)$$

Здесь $S' = (t_a, t_b) \times x_0$, $S = (t_a, t_b) \times x_1$, $\Sigma = \{t_a, t_b\} \times \{x_0, x_1\}$.

Тестовые расчеты организовывались следующим образом. Задавались управление $u_*(t) = 100 + 50 \sin[2\pi t / (t_b - t_a)]$ кДж/м²с и рассчитывалась соответствующая температура на внутренней поверхности стенки реактора. Данная температура принималась оптимальной T_* и решалась обратная задача о нахождении управления, доставляющего минимум

функционалу (2.19). Проверка по условию (2.17) подтвердила наличие оврага у целевого функционала (2.19).

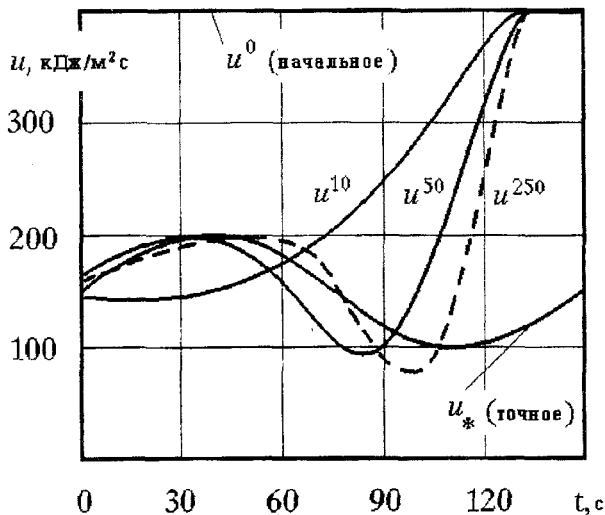
Для минимизации функционала J градиентный метод наискорейшего спуска (МНС) (2.16), (2.15) реализовывался приблизительно [59]:

$$\begin{cases} \text{если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, & b_1 \geq 1; \\ \text{если } J^k \geq J^{k-1}, \text{ тогда повторяется предыдущая итерация при } b^{k-1} = b_2 b^{k-2}, & b_2 < 1/b_1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Напомним, что точная реализация условия (2.15) в задачах оптимизации СРП резко снижает эффективность вычислительных алгоритмов. В выражении (2.20) принималось $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.5$. Начальное значение параметра шага b^0 задавалось из условия не более 20% первого изменения управления:

$$b^0 = \frac{0.2 u^0(t)}{|\nabla J^0(t)|}. \quad (2.21)$$

Рис. 2.1.
Минимизация целевого функционала (1.4) методом наискорейшего спуска



Из рис. 2.1 видно, что МНС (его приближительная реализация) не сходится к точному решению u_* за значительное число итераций. От итерации к итерации сходимость метода существенно замедляется. В таблице 2.1 приведены некоторые значения целевого функционала (2.19) и невязки решений $\Delta u^k = \|u^k - u_*\|$. Вряд ли следует ожидать существенного улучшения решения при дальнейшем увеличении числа итераций, к тому же разумным числом для СРП, пожалуй, следует считать число итераций не более 100.

Таблица 2.1. Минимизация целевого функционала (2.19) традиционными градиентными алгоритмами

Итерация	Метод монотонного убывания		Метод наискорейшего спуска			Метод сопряженных градиентов		
	J^k	$\Delta u^k, 10^4$	J^k	$\Delta u^k, 10^4$	$\ \nabla J^k\ $	J^k	$\Delta u^k, 10^4$	$\ \nabla J^k\ $
0	41650	266	41650	266	17	41650	266	17
10	827	202	458	188	0.5	458	185	0.5
30	367	186	38	152	0.05	5	133	0.05
50	220	180	20	144	0.04	2.5	126	0.02
100	91	164	7	136	0.01	0.5	117	0.01
150	56	158	4	132	0.008	0.2	112	0.003
250	32	150	2	127	0.008	0.2	112	0.003

Часто в градиентных алгоритмах минимизации используют не МНС, а так называемый метод монотонного убывания [28], где для выпуклых целевых функционалов принимают параметр $b^k = b^0$ постоянным на всех итерациях. Как показывают расчеты (таблица 2.1) такой метод дает существенно худшие результаты. Здесь u^{250} соответствовало приближению МНС u^{40} .

Не удалось, по-существу, улучшить решение и применением метода сопряженных градиентов (2.18). Решение представлено в таблице 2.1 и на рис. 2.2. Параметр шага b^k вычислялся при $b_2 = 0.2$. Кроме того, нижняя строка метода (2.20), для "очистения" направления p^k от накапливающихся погрешностей, дополнялась условием $p^{k-1} = \nabla J^{k-1}$. Минимизация методом сопряженных градиентов практически заканчивалась для 100 итераций (параметр $b^{100} \approx 0$). В

сравнении с предыдущими методами, он не существенно изменил невязку управлений Δu , что наглядно демонстрирует рис. 2.2.

Заметим, что при $b_2 > 0.2$ заметная минимизация J методом сопряженных градиентов заканчивалась намного раньше, с худшим приближением управления к экстремальному. При $b_2 < 0.2$ результаты, практически, совпадали с расчетом для постоянного параметра спуска $b^k = b^0$. Такая минимизация оказалась монотонной. Было всегда $J^{k+1} < J^k$ и не требовались "очистки" сопряженных направлений. Решение u^{100} рис. 2.2 при $b_2 < 0.2$ достигалось не за 100, а за 250 итераций.

Критерием достижения оптимального управления в рассматриваемой задаче является нуль $\|\nabla J\| = 0$. Однако оно никогда не выполнялось (см. таблицу 2.1). Существенное уменьшение градиента целевого функционала (в расчетах - на 4 порядка) не может служить критерием близости к оптимальному управлению, как это видно из рис. 2.1, 2.2.

Таким образом, результаты оптимального управления простейшим параболическим уравнением, полученные традиционными бесконечномерными методами минимизации, свидетельствуют о низкой эффективности данных методов. В общем случае традиционные методы первого порядка (градиентные методы и метод сопряженных градиентов) для минимизации функционалов применять нельзя.

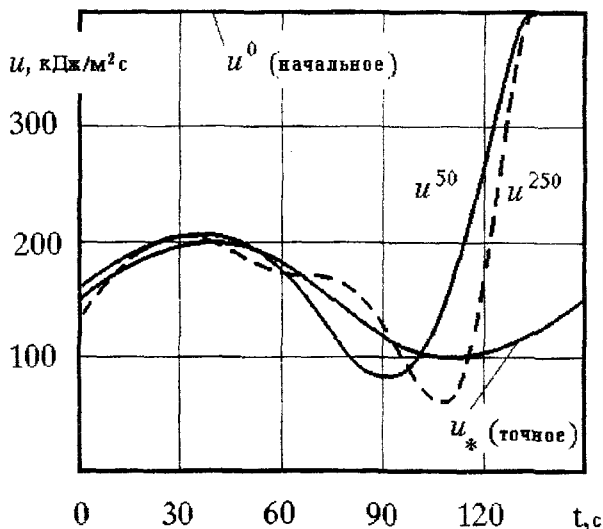


Рис. 2.2.
Минимизация целевого функционала (1.4) методом сопряженных градиентов

3. ОСНОВЫ ПРЯМОГО ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Исследование проблем сходимости экстремальных алгоритмов

Вначале остановимся на проблемах конечномерной минимизации без ограничений. Здесь управление - это вектор n -мерного евклидова пространства, т.е. $u \in E^n$. Пусть $n \geq 2$. Задачи одномерной минимизации, когда $n=1$, не содержат проблем многомерной минимизации и на сегодняшний день имеют много эффективных методов решения [28,77, 106 и др.].

Наибольшей популярностью среди экстремальных методов пользуются градиентные алгоритмы. В конечномерном случае они имеют вид:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \nabla J^k, \quad b^k > 0, \quad (3.1)$$

где ∇J^k - градиент целевой функции $J(u)$, вычисленный на итерации k , вектор ∇J^k принадлежит сопряженному пространству E_n^* . Наиболее эффективным методом среди алгоритмов (3.1) является метод наискорейшего спуска (МНС), где число b^k выбирается из условия:

$$b^k = \arg \min_b J(u^k + b \nabla J^k). \quad (3.2)$$

Градиентные методы построены на идее спуска из точки u^k в точку u^{k+1} в направлении наискорейшего убывания функции $J(u^k)$ так, чтобы в достаточно малой окрестности оптимального управления u_* имело место неравенство $\|\nabla J^{k+1}\| < \|\nabla J^k\|$. Данное условие является необходимым условием приближения к минимуму дифференцируемой функции. Конечным условием минимизирующего алгоритма (3.1) является необходимое условие оптимальности (НУО) $\|\nabla J(u_*)\| = 0$.

Алгоритмы (3.1) дают хорошие результаты минимизации функций только в исключительных случаях, а именно, в случаях когда целевые функции имеют слабо выраженные овраги или вообще не имеют таковых. На рис.3.1,а приведен пример линий уровня ($J = \text{const}$) двумерной безовражной функции $J(u)$, $u \in E^2$. Поверхность функции J представляет собой параболоид вращения, а линии уровня в пространстве управлений - концентрические окружности. Здесь МНС (3.1), (3.2) из любой

точки, например, из точки a , обеспечивает попадание в точку минимума u_* за одну итерацию.

Овражность целевой функции J — это весьма распространенное явление, которое объясняется разной чувствительностью функции J к разным компонентам вектора u .

На рис.3.1,б приведен пример линий уровня двумерной овражной функции $J(u)$, $u \in E^2$. Поверхность функции J представляет собой растянутый и немного изогнутый вдоль оси u_2 параболоид, т.е. J имеет низкую чувствительность относительно компоненты u_2 и высокую чувствительность относительно компоненты u_1 вектора управления u . Овраг функции J изображен пунктирной линией, он немного изогнут, проходит через минимальную точку u_* и ориентирован приблизительно вдоль оси u_2 .

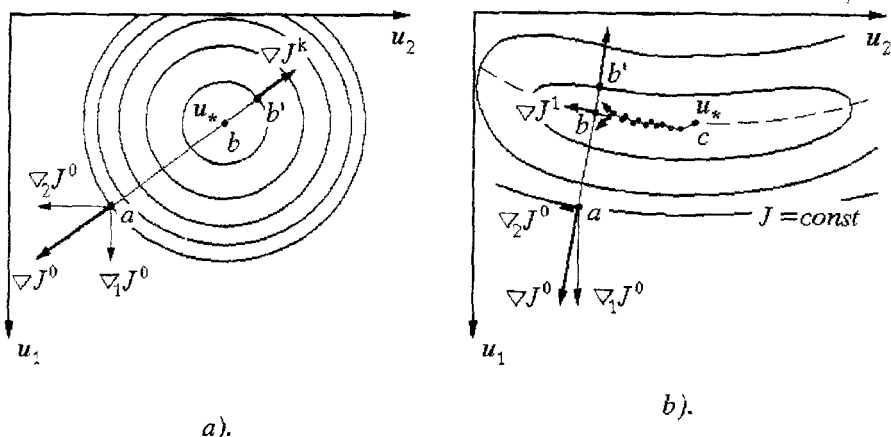


Рис. 3.1. Минимизация в двумерном пространстве:
а)- безовражной функции; б)- овражной функции

Для положительного ответа на вопрос о наличии оврага у какой-либо функции можно использовать информацию о поведении знаков компонент градиента этой функции при ее минимизации градиентными алгоритмами. Заметим, что исследование и минимизация функций (а далее и функционалов) на основе поведения компонент вектора градиента — это одна из принципиальных особенностей подхода, предлагаемая и развиваемая автором.

Пусть имеется начальное приближение управления u^0 в точке a на рис. 3.1, б. Точка b — это очередное приближение МНС (3.1), (3.2). Если же глубину спуска в алгоритме (3.1) выбрать больше МНС, то мы перепрыгнем через дно оврага и попадем в точку b' . В указанных точках компоненты вектора ∇J имеют знаки:

$$\begin{aligned} a : & \quad \operatorname{sgn} \nabla_1 J = +1 & \operatorname{sgn} \nabla_2 J = -1; \\ b : & \quad \operatorname{sgn} \nabla_1 J = -1 & \operatorname{sgn} \nabla_2 J = -1; \\ b' : & \quad \operatorname{sgn} \nabla_1 J = -1 & \operatorname{sgn} \nabla_2 J = +1; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Компоненты вектора градиента при перепрыгивании через овраг (дно оврага) изменили знаки на противоположные по сравнению с начальными значениями в точке a . В окрестности же дна оврага в точке b компоненты вектора градиента изменили знаки только частично, что невозможно при отсутствии оврага (см. пример безовражной функции рис. 3.1, а).

Таким образом, если существует такая итерация k и начальное приближение u^0 , что для какого-либо очередного приближения градиентным алгоритмом (3.1) имеет место:

$$\operatorname{sgn} \nabla_i J^0 = \begin{cases} -\operatorname{sgn} \nabla_i J^k & \text{для некоторых } i, \\ \operatorname{sgn} \nabla_i J^k & \text{для остальных } i, \end{cases} \quad (3.4)$$

то функция J имеет овраг. Такое поведение ∇J^k соответствует повороту направления градиентного спуска вблизи дна оврага. Если верхняя строка выполняется для всех i , то такая итерация соответствует переходу через дно оврага или через минимум функции J .

Если известно приблизительное значение оптимального управления для некоторой функции J , то об овражности J можно судить по абсолютным значениям компонент вектора градиента для соответствующего начального приближения. Такой способ мы будем использовать для дальнейшего исследования особенностей минимизации овражных отображений. Кратко обсудим его.

Если функция J не имеет оврага, то вектор градиента $\nabla J(u^0)$ будет коллинеарен вектору $u^0 - u_{*}$, компоненты этих векторов будут пропорциональны, т.е. мы будем иметь соотношение:

$$\frac{|\nabla_1 J^0|}{|u_1^0 - u_{*1}|} = \frac{|\nabla_2 J^0|}{|u_2^0 - u_{*2}|}. \quad (3.5)$$

Теперь пусть имеется начальное приближение вектора управления u^0 , отстоящее от оптимального значения u_* приблизительно одинаково далеко относительно каждой компоненты вектора $u_* = (u_{*1}, u_{*2})$. Такое начальное приближение, например, изображено на рис. 3.1, здесь

$$|u_1^0 - u_{*1}| \approx |u_2^0 - u_{*2}|. \quad (3.6)$$

Если исследуемая функция не имеет оврага, тогда, согласно (3.5), между компонентами градиента должно быть соотношение:

$$|\nabla_1 J^0| \approx |\nabla_2 J^0|,$$

что и демонстрирует рис. 3.1, а. Для случая овражной функции рис. 3.1, б мы имеем иное соотношение:

$$|\nabla_1 J^0| > |\nabla_2 J^0|,$$

которое можно считать критерием наличия оврага при начальном приближении типа (3.6).

Минимизация овражных функций всегда осуществляется по сложным траекториям вдоль дна оврага. На рис. 3.1, б показана траектория приближения к минимуму МНС. Видно, что спуск вдоль дна оврага представляет собой ломаную траекторию с колебаниями поперек линии дна оврага. "Цена" каждого излома траектории — это дополнительный расчет градиента ∇J^k .

Теперь увеличим размерность пространства управлений.

Пусть имеется n -мерное дифференцируемое отображение $J(u)$ с оврагом таким, что при начальном приближении типа (3.6) между компонентами градиента имеется соотношение: $|\nabla_1 J^0| \gg |\nabla_2 J^0| \gg \dots \gg |\nabla_n J^0|$. При этом градиентные методы будут реализовывать начальный спуск в основном вдоль первой компоненты $\nabla_1 J^0$, поскольку

$$|\nabla_1 J^k| \gg |\nabla_i J^k|, \text{ где } i \geq 2. \quad (3.7)$$

(спуск \approx вдоль оси u_1 до условия $|\nabla_1 J^k| \approx |\nabla_2 J^k|$)

Спуск (3.7) будет осуществляться аналогично спуску рис. 3.1, б приблизительно ортогонально к первому участку bc линии дна.

Следующий спуск будет реализовываться приблизительно вдоль упомянутого участка линии дна при условии

$$|\nabla_2 J^k| \gg |\nabla_i J^k|, \text{ где } i \geq 3. \quad (3.8)$$

(спуск \approx вдоль оси u_2 до $|\nabla_1 J^k| \approx |\nabla_2 J^k| \approx |\nabla_3 J^k|$)

Спуск (3.7) и (3.8) будет осуществляться практически только в плоскости (u_1, u_2) .

Очередной спуск будет выполняться при условии

$$|\nabla_3 J^k| \gg |\nabla_1 J^0|, \text{ где } k \geq 4. \quad (3.9)$$

(спуск \approx вдоль оси u_3 до $|\nabla_1 J^k| \approx |\nabla_2 J^k| \approx |\nabla_3 J^k| \approx |\nabla_4 J^0|$)

в трехмерном пространстве (u_1, u_2, u_3) вдоль нового участка линии дна, приблизительно ортогонального первому участку, лежащему в плоскости (u_1, u_2) , и т. д.

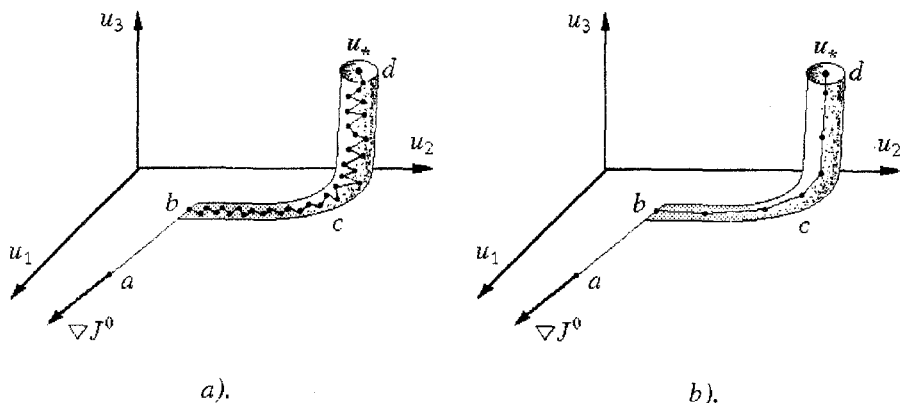


Рис. 3.2. Минимизация овражной функции в трехмерном пространстве: а)- методом наискорейшего спуска; б)- методом сопряженных градиентов

На рис. 3.2,а показана характерная траектория таких приближений МНС в трехмерном пространстве управлений $u \in E^3$. Движение вдоль отрезка ab – одномерное, вдоль отрезка bc – двумерное, вдоль cd – трехмерное. Дно оврага состоит из двух участков – bc и cd , которые можно считать приблизительно ортогональными. Траектория рассматриваемого спуска носит ломаный, поперечный относительно линии дна оврага колебательный характер, причем степени свободы колебаний возрастают с каждым новым участком линии дна:

- участок ab : одномерная минимизация, поперечные колебания отсутствуют;
- участок bc : колебания в плоскости (u_1, u_2) ;
- участок cd : колебания в пространстве (u_1, u_2, u_3) .

Это означает, что при приближении к оптимальному управлению u_* , количество колебаний, изломов траектории спуска может значительно возрастать и, тем самым, будет существенно снижаться скорость сходимости к u_* .

Таким образом, для управления $u \in E^n$ рассматриваемого обратного отображения $J(u)$ мы имеем линию дна, состоящую из $n-1$ участков приблизительно ортогональных друг к другу. Спуск вдоль каждого участка дна по методу наискорейшего спуска сопровождается поперечными осцилляциями, причем степень свободы таких осцилляций при переходе к каждому новому участку линии дна возрастает на единицу и достигает размерности n .

Для борьбы с указанными осцилляциями рекомендуется применять метод сопряженных градиентов [28, 77, 106 и др.]:

$$u^{k+1} = u^k - b^k p^k, \quad b^k > 0, \quad (3.10)$$

где вектор $p^k = \nabla J^k + \|\nabla J^k\|^2 / \|\nabla J^{k-1}\|^2 p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$, а число b^k выбирается согласно (3.2). Как и градиентные методы, метод (3.10) является методом первого порядка, однако он обладает скоростью сходимости близкой к методам второго порядка. Характер траектории спуска по методу (3.10) для $u \in E^8$ приведен на рис. 3.2, б.

Сравнивая рис. 3.2, а и рис. 3.2, б, мы видим, что метод сопряженных градиентов реализует спуск вдоль линии дна bcd оврага без осцилляций, что обеспечивает относительно высокую скорость сходимости. Однако, чем больше размерность вектора управления u , тем длиннее становится линия дна оврага и тем больше требуется итераций для достижения оптимального управления u_* . Заметим к тому же, что, в общем случае — для неквадратичной функции J , для преодоления каждого участка линии дна требуется не одна, а несколько итераций (несколько изломов траектории спуска).

Если минимизируемая функция обладает слабо выраженной овражностью, то спуск в пространстве E^n принимает вид изображенный на рис. 3.3, а. Здесь линия дна (участки bc , cd) выравнивается и сокращается. В предельном случае, когда овраг исчезает, траектория

приближения к оптимальному управлению по МНС вырождается в одну прямую линию ab рис. 3.3, б, аналогично двумерному случаю - рис. 3.1, а.

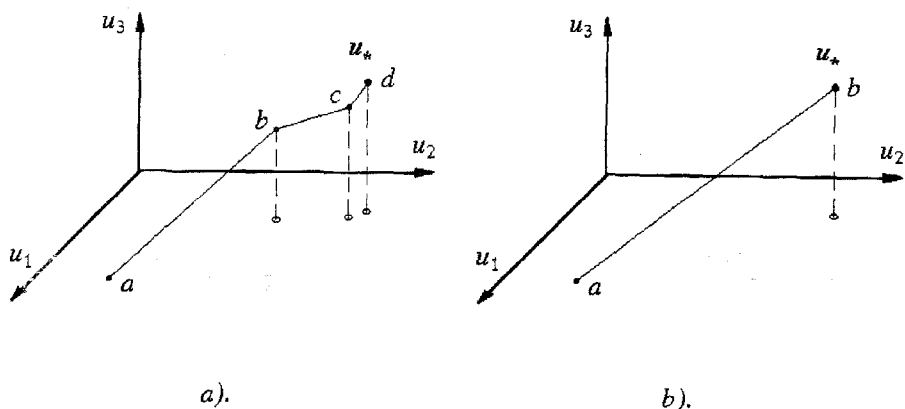


Рис. 3.3. Минимизация в трехмерном пространстве:
 а) со слабо выраженной овражностью;
 б) с отсутствующей овражностью

Таким образом, если пространство управлений - бесконечномерное, т.е. $n \rightarrow \infty$, то ни метод сопряженных градиентов, ни тем более МНС, не могут за конечное число итераций достичь минимум *овражного* отображения. Экстремальные методы первого порядка для бесконечномерных пространств в общем случае неприменимы. Бесконечномерность пространства управлений означает, что управление является не вектором $u \in E^n$, а функцией $u(\tau)$, определенной на пространственно-временном множестве S .

На рис. 3.4 показан переход вектора управления u из конечномерного в бесконечномерное пространство. В декартовой системе координат мы можем представить не более чем трехмерный вектор управления u - рис. 3.4, а. Для иллюстрации значений управления в многомерных пространствах систему координат удобно изображать в виде рис. 3.4, б. Тогда значение вектора $u \in E^n$ будет определяться множеством из n точек на осях i рис. 3.4, с. При $n \rightarrow \infty$ все точки

сливаются в одну линию – рис. 3.4, d. При этом каждый индекс оси i превращается в точку τ пространственно-временного множества S , а каждая u_i компонента вектора управления – в локальное значение функции управления $u(\tau)$ в точке $\tau \in S$. Аналогично рассуждая, компоненты градиента $\nabla_i J$ вектора $\nabla J \in E_n$ превращаются в локальные значения функции ∇J в точках $\tau \in S$.

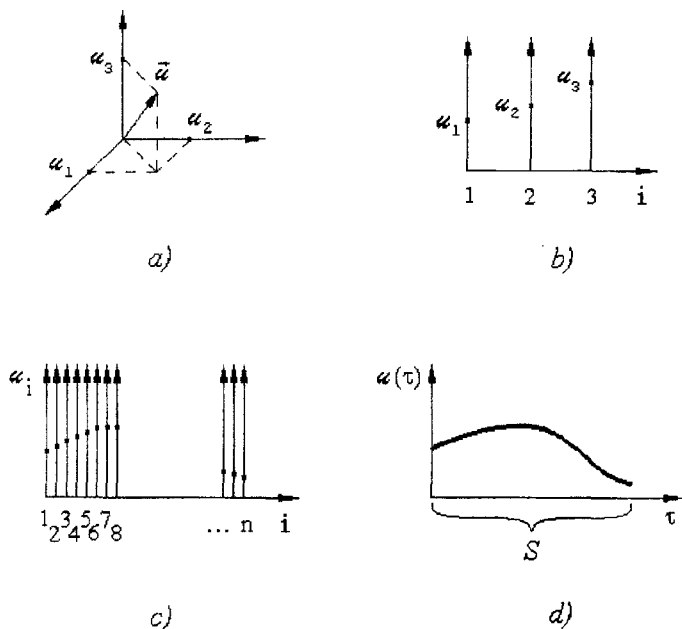


Рис. 3.4. Переход из конечномерного пространства управлений-векторов в бесконечномерное пространство управлений-функций

На основе локальных значений функции ∇J можно исследовать и эффективно минимизировать функционал J . Разработка условий оптимальности и алгоритмов минимизации, существенным образом использующих информацию о локальном на S поведении градиента ∇J – это новая идея, которая широко используется в данной работе.

Например, критерий овражности (3.4) в бесконечномерном пространстве будет формулироваться следующим образом. Если существует такая итерация k и начальное приближение u^0 , что для какого-либо очередного приближения градиентным алгоритмом знаки локальных значений функции ∇J^k на части S изменяются, т.е.

$$\operatorname{sgn} \nabla J^k = \begin{cases} -\operatorname{sgn} \nabla J^k & \text{для } t \in S, \\ \operatorname{sgn} \nabla J^k & \text{для } t \in S^c, \end{cases} \quad (3.11)$$

то функционал J имеет овраг. Если $s=S$, то такая итерация соответствует переходу через дно оврага или через минимум функционала J .

Общий недостаток экстремальных методов первого порядка заключается в том, что они всегда ведут спуск вдоль линии дна (с осцилляциями или без них). Такого недостатка лишены методы второго и более высоких порядков, однако вычисление производных более первого порядка, особенно в бесконечномерном случае для СРП, является весьма громоздкой процедурой. Эта процедура настолько громоздка и неочевидна для дифференциальных уравнений в частных производных, что автору настоящей монографии, к сожалению, не известна ни одна публикация в этой области.

Очевидно, что необходима разработка новых методов минимизации и функций и функционалов, основанных на использовании только первых производных, но обладающих характером сходимости методов не ниже второго порядка. Такие методы должны обеспечивать спуск к оптимальному управлению не вдоль дна оврага, а перешагивая его многочисленные (для функционалов - бесконечночисленные) повороты всех участков линии дна. Такой спуск должен иметь вид траектории o_e на рис. 3.5 для примера конечномерного управления $u \in E^2$. Траектория $abcd$ - это осредненный спуск традиционными методами первого порядка.

Из рис. 3.5 и условий типа (3.7)-(3.9) следует, что траектория o_e должна строиться исходя из требования

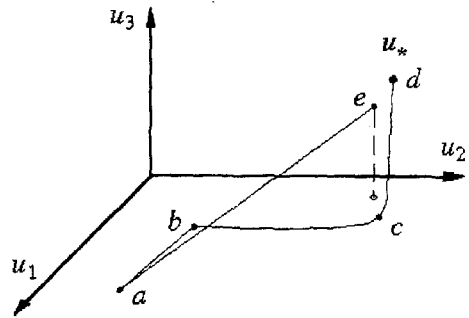
$$\nabla_i J^k \rightarrow 0 \quad \forall i \quad (3.12)$$

в противоположность традиционному условию, на котором строятся градиентные алгоритмы - это

$$\|\nabla J^k\| \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Действительно, традиционный шаг ab наискорейшего убывания J , согласно (3.7), приводит к уменьшению абсолютного значения только первой компоненты градиента $\nabla_1 J$ (основное движение - в подпространстве E^1 вдоль оси u_1), что удовлетворяет условию (3.13). На втором участке bc начинает убывать абсолютное значение второй компоненты градиента $\nabla_2 J$ (движение в подпространстве-плоскости E^2), продолжая реализовывать условие (3.13), и т.д. При этом мы будем иметь неравномерную по компонентам вектора ∇J сходимость к нулю градиента целевой функции J и неравномерное приближение к оптимальному управлению u_* .

Рис. 3.5. Минимизация овражной функции в трехмерном пространстве с равномерным спуском ae к оптимальному управлению u_* .



В то же время шаг ed с равномерным уменьшением компонент градиента $\nabla_i J$ реализует равномерное движение к оптимальному управлению u_* сразу во всем пространстве E^n . Такой спуск обеспечивает попадание в относительно малую окрестность оптимального управления. Дальнейшее приближение к оптимальному управлению целесообразно строить на основе каких-либо достаточных условий оптимальности (ДУО).

Условие (3.12) является итерационным выражением новой формы НУО:

$$\nabla_i J(u_*) = 0 \quad \forall i. \quad (3.14)$$

Данное НУО и соответствующие алгоритмы, построенные на нем, подробно обсуждаются в следующих параграфах для случая бесконечно-

мерного пространства. В бесконечномерном случае НУО (3.14) имеет локальную на S , а не традиционную интегральную форму.

Из условия (3.14) взаимно однозначно следует традиционная форма НУО:

$$\|\nabla J(u_*)\| = 0. \quad (3.15)$$

Разница между формами НУО (3.14) и (3.15) является принципиальной только для прямых методов минимизации целевого функционала J , поскольку здесь решение ищется на основе итерационных приближений к НУО, когда $u^k \neq u_*$. Стремление $u^k \rightarrow u_*$, построенное на условии (3.14), как это следует из предыдущих рассуждений, будет носить принципиально иной характер, чем стремление на основе условия (3.15). Для непрямых методов оптимизации НУО (3.14) никакой новой информации не содержит, поскольку в этом случае оптимальное решение ищется непосредственно из условия (3.15), а не каких-либо приближений к нему.

Очевидно, что равномерная сходимость градиента (3.12) к нулю в соответствующих алгоритмах минимизации будет обеспечивать относительно высокую скорость сходимости управлений u^k к оптимальному значению u_* .

В следующих параграфах данной главы для бесконечномерных пространств разрабатываются новые НУО и ДУО в локальной на S форме. А в следующей главе новые условия оптимальности применяются для разработки алгоритмов минимизации, основанных на вычислении только первой производной целевого функционала, но обеспечивающих быструю и, как показывают примеры, равномерную сходимость.

При разработке новых НУО, ДУО и алгоритмов минимизации предполагается, что целевой функционал может быть не обязательно выпуклым и дифференцируемым. В этом случае необходимо обоснование вопросов дифференцируемости функционала, что и осуществляется в следующем параграфе.

3.2. Производные в бесконечномерном пространстве

Начнем исследование проблем дифференцируемости с конечномерных пространств. Пусть имеется отображение $J(u)$, действующее из n -мерного действительного евклидова пространства E^n в пространство $E^r = R$. Введем единичный вектор $h \in E^n$, $\|h\| = 1$, и вектор $\delta u = \gamma h$.

где число $\gamma > 0$. Оба эти вектора будут определять некоторое направление в пространстве E^n .

Напомним определение производной отображения J в точке u по направлению h или, что то же самое, — по направлению δu :

$$J'_u[h] = \lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{J(u + \delta u) - J(u)}{\gamma} \in R. \quad (3.16)$$

Число $J'_u[h]$ (если оно существует) характеризует величину роста или уменьшения отображения J в точке u по направлению δu . Для дальнейших выкладок будет удобнее использовать не традиционное понятие (3.16) производной по направлению, а векторную модификацию такой производной. Это позволит усилить наглядность алгоритмов минимизации и условий оптимальности.

Введем вектор

$$T_u[h] = J'_u[h] \cdot h^T \in E_n, \quad (3.17)$$

который будем называть *векторной производной* отображения J в точке u по направлению δu . Индекс "т" означает транспонирование.

Из условия (3.17) следует, что $(T_u[h], h) = J'_u[h](h^T, h) = J'_u[h]$. Здесь скалярное произведение $(T_u[h], h)$ удобно трактовать как вычисление значения векторной производной $T_u[h]$ на элементе h . Производная $T_u[h] \in E_n$, т.е. это n -мерный вектор-строка с компонентами $\{T_u^{(1)}, T_u^{(2)}, \dots, T_u^{(n)}\}$. Данный вектор всегда ориентирован вдоль, либо против направления $\delta u = \gamma h$ и имеет длину, равную значению традиционной производной (3.16) по данному направлению.

Если отображение $J(u)$ гладкое, то $J(u)$ имеет градиент $\nabla J(u)$, т.е. вектор, который указывает направление наибольшего роста отображения J в точке u . Вектор $\nabla J(u)$ можно трактовать как частный случай векторной производной $T_u[h]$ относительно орта $h = h_{\max}$, определяемого условием

$$h_{\max} : (T_u[h], h) = \max_h \Rightarrow T_u[h_{\max}] = \nabla J(u). \quad (3.18)$$

Поскольку, в разрабатываемом прямом подходе оптимизации, предполагается использовать только первые производные от J , то о достижении или близости к оптимальному управлению мы можем судить

только по поведению ∇J . Одним из новых и принципиальных моментов в рассматриваемом подходе является анализ поведения не только нормы вектора $\nabla J \in E_n$, но и анализ поведения его компонент $\nabla_i J$, $i=1,2,\dots,n$ (напоминаем, что мы пока что рассматриваем конечномерную ситуацию).

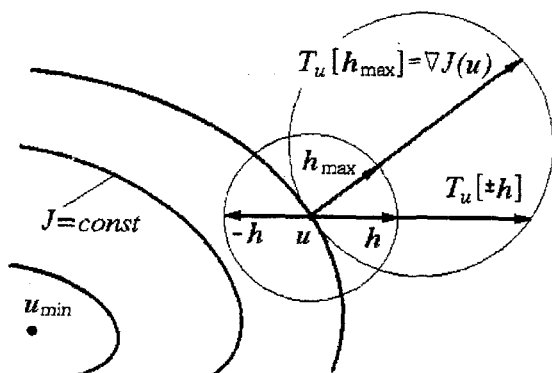
По знакам компонент вектора $T_u[h]$ можно судить о поведении отображения J в точке u в заданном направлении. Очевидно, что если $J(u)$ в направлении bu возрастает, то

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sgn} T_{u_i}[h] &= \operatorname{sgn} h_i, \quad i=1,2,\dots,n, \\ \operatorname{sgn} T_{u_i}[h] &= -\operatorname{sgn} h_i, \quad i=1,2,\dots,n. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

в случае убывания

На рис. 3.6 относительно линий уровня двумерной гладкой функции $J(u_1, u_2)$ демонстрируется основное свойство векторной производной $T_u[h]$: вектор $T_u[h]$ не может быть направлен в сторону убывания отображения $J(u)$ для любых $h \in E^n$.

Рис. 3.6. Демонстрация свойств векторной производной $T_u[h]$



Для любого гладкого n -мерного отображения J концы векторов $T_u[h]$ для всевозможных h лежат на поверхности одного и того же n -мерного шара (на рис 3.6 - двумерного шара). Очевидно, что в случае гладкости отображения $J(u)$, для описания скорости изменения J по всем направлениям достаточно задать только один вектор $T_u[h_{\max}] = \nabla J(u)$.

Теперь перейдем к бесконечномерным пространствам, т.е. $n \rightarrow \infty$ и будем рассматривать проблемы минимизации функционалов. Управление $u \in E^n$ превратится в функцию $u(\tau) \in H(S)$, определенную на замкнутом множестве S в действительном бесконечномерном гильбертовом пространстве H . Вектор ∇J станет скаляр-функцией из сопряженного пространства $H^*(S)$. Единичный вектор $h \in E^n$ превратится в функцию $h(\tau) \in H(S)$, такую, что $\|h\|_{H(S)} = 1$. Понятие "компонента вектора" заменится на понятие "локальное значение" функции, т.е. значение функции, вычисленное в заданной точке $\tau \in S$. Далее слово "вектор", если и будем употреблять, то только в кавчыках. Норму и скалярное произведение в H и H^* , если далее не будет специально оговариваться, будем понимать как норму в пространстве с интегрируемым квадратом L_2 . Заметим, что, если $H=L_2$, то $H^*=H$.

Уточним понятие векторной производной для бесконечномерного пространства.

Определение 3.1. Отображение $J(u) \in R$ дифференцируемо в точке $u \in H(S)$ по направлению $\delta u = \gamma h$, $\gamma \in R$, $h \in H(S)$, $\|h\| = 1$, если определен ограниченный линейный функционал $T_u[h] \in H^*(S)$ такой, что

$$(T_u[h], h) = \lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{J(u + \delta u) - J(u)}{\gamma}. \quad (3.20)$$

Отметим, что традиционное понятие функциональной производной по направлению - это число $J'_u[h] = (T_u[h], h)$, а не линейный функционал $T_u[h]$. Число $J'_u[h]$ называется дифференциалом Гато или первой вариацией функционала $J(u)$ в направлении $\delta u = \gamma h$. В случаях, когда нет необходимости уточнять направление дифференцирования, мы будем вместо $T_u[h]$ писать просто T_u .

Пусть отображение J дифференцируемо на открытом множестве $U_{\text{од}} \subset H(S)$ по направлениям, т.е. линейный ограниченный функционал $T_u[h] \in H^*(S)$ существует в каждой точке $u \in U_{\text{од}}$ для любого $h \in H$. При этом для достаточно малых γ из определения (3.20) следует условие:

$$J(u + \delta u) - J(u) - \gamma(T_u[h], h) = o(\gamma), \quad (3.21)$$

где функция $o(\gamma)$ такова, что $\frac{o(\gamma)}{\gamma} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +0} 0$ для любых $u \in U_{\text{од}}$ и $h \in H$, $\|h\| = 1$.

Производную $T_u \in H^*$ можно считать обобщением популярных производных Гато G_u и Фреше F_u . Если функционал J в точке u имеет

линейный дифференциал Гато (для всех δu), тогда в данной точке отображение J имеет производную Гато. Например, пусть отображение J в точке u разрывно и дифференцируемо по направлениям, причем производная $T_u[h]=T_u[-h]$ для всех $h \in H$, тогда $T_u[h_{\max}] = G_u$, где h_{\max} - это такое h , что $(T_u[h], h) = \max$ для всех $h \in H$. В этом случае выражение (3.21) имеет место при $\frac{o(\gamma)}{\gamma} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$ неравномерно по h .

Если $\frac{o(\gamma)}{\gamma} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$ равномерно по h , тогда $T_u[h_{\max}] = F_u$. При этом отображение J в точке u является не только непрерывным, но и гладким, или короче, - *дифференцируемым* в данной точке. Производная Фреше представляет собой градиент отображения J , т.е. $F_u \equiv \nabla J(u)$. В алгоритмах минимизации допускается $\nabla J(u) = G_u$.

Если функционал J в точке u имеет нелинейный дифференциал Гато, то в данной точке не существует ни производной Гато, ни тем более - производной Фреше. В этом случае для исследования задач оптимизации используют линеаризацию дифференциала Гато $J'_u[h]$ при помощи субдифференциалов [40,69,112]. В настоящей работе субдифференциалы не будут использоваться. Мы будем исследовать условия оптимальности при помощи производной $T_u[h]$. Далее будем считать отображение J *равномерно дифференцируемым по направлениям* [40,69] в каждой точке $u \in U_{ad}$. Уточним данное понятие.

Определение 3.2. Отображение $J \in R$ равномерно дифференцируемо по направлениям в точке u , если функция $o(\gamma)$ в условии (3.21) удовлетворяет следующим требованиям. При любом $\varepsilon > 0$ для всех $h \in H(S)$, $\|h\|=1$ найдется $\beta > 0$, что для всех $\gamma > 0$ таких, что $\gamma \leq \beta$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{o(\gamma)}{\gamma} \right| < \varepsilon.$$

Равномерная дифференцируемость J по направлениям превращает условие (3.21) в неравенство

$$\left| J(u+\delta u) - J(u) - \gamma(T_u[h], h) \right| < \varepsilon \gamma. \quad (3.22)$$

Заметим, что дифференцируемость (гладкость) отображения J при этом не подразумевается. Для гладкого отображения равномерная дифференцируемость по направлениям отождествляется с дифференцируемостью по Фреше. Для негладких отображений введем понятия *стадионарных* и *сингулярных* точек через локальные на S свойства производной T_u .

Определение 3.3. Если в некоторой точке $u \in H(S)$ отображения $J(u) \in \mathbb{R}$ производная $T_u[h] \in H^*(S)$ для всех $h \in H$, $\|h\|=1$ обращается в ноль почти всюду на S (п.в.С), т.е.

$$T_u[h] = 0 \quad \text{п.в.С, } \forall h \in H, \quad (3.23)$$

то такую точку u будем называть стационарной точкой отображения J .

Определение 3.4. Если в некоторой точке $u \in H(S)$ отображения $J(u) \in \mathbb{R}$ производная $T_u[h] = 0$ п.в.С для некоторых $h \in H$, $\|h\|=1$, а для всех остальных $h^* \in H \setminus h$, $\|h^*\|=1$ производная $T_u[h^*] \neq 0$ на множестве $z \in S$ ненулевой меры, причем

$$T_u[h^*] \neq T_u[-h^*] \quad \text{п.в.С,} \quad (3.24)$$

то такую точку u будем называть сингулярной. Частный случай сингулярной точки будем называть строго сингулярной, если условие (3.24) выполняется для всех $h^* \in H$. При этом множество $\{h: T_u[h] = 0 \text{ п.в.С}\}$ – пустое.

Не следует смешивать данное определение сингулярной (особой) точки с традиционным понятием особого управления, о котором упоминалось в §2 предыдущей главы. Напоминаем, что традиционное особое управление является "особым" только в рамках принципа максимума и не имеет никакого отношения к задаче оптимального управления. Особое управление в Определении 3.4 отражает особый характер самой задачи оптимизации, а именно, – недифференцируемость критерия качества управления при каких-либо значениях управления.

Дифференциал Гато в сингулярных точках нелинеен, поэтому здесь не существует ни производная Гато, ни производная Фреше. Примером строго сингулярной точки является точка $u=0$ отображения $J = \int |u| dS$. В стационарных точках производные Гато и Фреше (для непрерывного J) обращаются в ноль.

Определение 3.3, в отличие от классического понятия стационарной точки, не требует непрерывности отображения J и является локальным, а не интегральным на S понятием. Локальный характер Определения 3.3 существенно используется в дальнейшем при формулировке условий оптимальности и при построении алгоритмов минимизации.

3.3. Необходимые условия оптимальности

Первые идеи новых НУО и ДУО для прямого экстремального подхода можно встретить в работах [96, 120]. В данном параграфе мы подробно рассмотрим НУО.

Уточним терминологию. Пусть $U_{\text{од}}$ — это открытое допустимое множество управлений в бесконечномерном гильбертовом пространстве H . Точка u_* отображения $J(u)$, $u \in U_{\text{од}}$ является точкой локального минимума, если имеет место неравенство $J(u) \geq J(u_*)$ в некоторой окрестности точки $u_* \in U_{\text{од}}$. Если имеет место строгое неравенство, то u_* — точка строгого локального минимума или локально оптимальная точка. Если, кроме того $J(u_*) = \inf J(u)$ на $U_{\text{од}}$, то u_* — точка глобального минимума или глобально оптимальное управление. Когда нет необходимости различать указанные типы точек u_* , то будем говорить просто о минимуме отображения J . Разрабатываемые далее условия оптимальности применимы к локально оптимальным управлениям из открытого допустимого множества управлений $U_{\text{од}} \subset H$. Вопросы краевых экстремумов здесь не рассматриваются.

Перейдем к исследованию необходимого условия минимума.

Теорема 3.1 (Необходимое условие минимума на открытом множестве $U_{\text{од}} \subset H(S)$). Если однозначно определенное отображение $J(u)$ на $U_{\text{од}}$ дифференцируемо по направлениям в смысле (3.21), тогда минимум отображения J может достигаться только в стационарных или в сингулярных точках $u_* \in U_{\text{од}}$.

Доказательство. Если точка u_* является точкой минимума, однозначно определенного на открытом множестве отображения J , то J в некоторой окрестности этой точки не может убывать в любом направлении $\delta u = \gamma h$, $h \in H(S)$, $\|h\| = 1$, т.е. для достаточно малых γ

$$J(u_* + \delta u) - J(u_*) \geq 0 \quad \forall h \in H. \quad (3.25)$$

С другой стороны в окрестности точки u_* , согласно условиям (3.21) дифференцируемости J по направлениям, мы имеем

$$J(u_* + \delta u) - J(u_*) = \gamma (T_{u_*} [h], h) + o(\gamma).$$

Следовательно, $(T_{u_*} [h], h) \geq -\frac{o(\gamma)}{\gamma} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +0} 0$ для всех $h \in H$. Получаем, что в точке $u = u_*$ производная T_{u_*} должна удовлетворять условию:

$$(T_{u_*}[h], h) \geq 0 \quad \forall h \in H. \quad (3.26)$$

Условие (3.26) удовлетворяется в двух случаях. Первый - это $T_{u_*} = 0$ п.в. $S \quad \forall h \in H$. Такая точка u_* , согласно Определению 3.3, является стационарной.

Второй случай. Пусть для каких-либо $h^* \in H$ производная $T_{u_*}[h^*] \neq 0$ п.в. $s \in S$, где s - множество ненулевой меры. "Вектор" $T_{u_*}[h^*]$ (см. конечномерную аналогию рис. 3.6) всегда направлен либо вдоль, либо против "вектора" h^* . Поэтому для удовлетворения условия (3.26), необходимо, чтобы знаки локальных значений функций $T_{u_*}[h^*]$ и h^* почти всюду на s были одинаковы (см. конечномерную аналогию (3.19)), т.е.

$$\text{sgn} T_{u_*}[h^*] = \text{sgn} h^* \quad \text{п.в.} s. \quad (3.27)$$

Выражение (3.27) при h^* удовлетворяет условию (3.24). Согласно Определению 3.4 такая точка u_* является сингулярной. Теорема доказана.

Замечание. Если отображение J дифференцируемо (по Фреше или по Гато) в точке $u_* \in U_{ad}$, то НУО представимо в традиционной интегральной форме [29, 50, 54, 77, 78]:

$$\delta J = (\nabla J(u_*), \delta u) = 0 \quad \forall \delta u, \quad \text{либо} \quad \|\nabla J(u_*)\| = 0. \quad (3.28)$$

Пусть отображение $J(u)$ дифференцируемо в некоторой окрестности сингулярного оптимального управления u_* . При этом для любого $h \in H(S)$, $\|h\| = 1$ имеет место

$$\nabla J(u_* + \delta u) \xrightarrow{\delta u \rightarrow 0} T_{u_*}[h], \quad \delta u = \gamma h, \quad \gamma > 0.$$

Согласно Определению 3.4 в сингулярной точке u_* существует функция $h \in H(S)$, $\|h\| = 1$, что $T_{u_*}[h]$ имеет конечное ненулевое значение п.в. $s \in S$. Тогда в окрестности сингулярного минимума найдется число $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta u \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$ имеет место

$$|\nabla J(u_* + \delta u)| > \varepsilon \quad \text{п.в.} s \in S, \quad (3.29)$$

При этом на $S \setminus s$ возможно $\nabla J(u_* + \delta u) = 0$. Свойство (3.29) в интегральной форме имеет вид:

$$\|\nabla J(u_* + \delta u)\| > \varepsilon' \quad \text{п.в. } s \in S, \quad \varepsilon' > 0. \quad (3.29')$$

Другими словами, для любых малых отклонений от сингулярной точки u_* в направлении $\delta u = \gamma h$ мы будем иметь относительно большие значения градиента. Если условие (3.29) выполняется для всех $h \in H$, то u_* — строго сингулярная точка.

Поскольку вычисление производных по направлению — это не тривиальная процедура, то было бы удобно иметь условия оптимальности относительно традиционной производной Фреше, т.е. относительно градиента ∇J . При условии локальной недифференцируемости отображения J на $U_{\text{од}}$ Теорема 3.1 принимает следующий вид:

Следствие 3.1 (Необходимое условие минимума при локальной недифференцируемости на открытом множестве $U_{\text{од}} \subset H(S)$). Пусть непрерывное отображение $J(u)$ достигает минимум в точке $u_* \in U_{\text{од}}$ и дифференцируемо в окрестности точки u_* , быть может за исключением самой точки u_* . Тогда необходимо, чтобы выполнялось одно из двух следующих условий:

1. u_* — стационарная точка: $\nabla J(u_*) = 0$ п.в. S ;
2. u_* — сингулярная точка: $|\nabla J(u_* + \delta u)| > \varepsilon$ п.в. $s \in S$,
 $\delta u = \gamma h, \quad \gamma \rightarrow +0, \exists h.$

Условия данного Следствия ослаблены по сравнению с Теоремой 3.1. Требование однозначности и дифференцируемости J по направлениям заменено условием непрерывности J .

Замечание 1. В случае $\nabla J(u) = 0$ п.в. $s \in S$ нельзя утверждать о близости управления u к стационарной точке u_* .

Замечание 2. Сформулированное НУО-Следствие 3.1 имеет локальную на S форму, оно записано для функции ∇J относительно пространственно-временных точек $t \in S$. Данное обстоятельство существенно в случае реализации НУО прямыми экстремальными методами.

Локальная форма НУО (3.30) в сравнении с традиционной интегральной формой предъявляет повышенные требования к характеру сходимости, т.е. к выбору направления минимизации J . Здесь для дифференцируемых функционалов J на каждой итерации k требуется

сходимость $\forall \epsilon^* \rightarrow 0$ п.в.С. Традиционные НУО требуют сходимость по норме, т.е. $\|\forall \epsilon^*\| \rightarrow 0$. Очевидно, что алгоритмы, построенные на локальной форме НУО, будут обладать лучшей сходимостью к оптимальному управлению $u_*(\tau)$ на пространственно-временном множестве S .

3.4. Достаточные условия оптимальности

Напомним, что традиционные ДУО требуют либо вычисление вторых производных целевого функционала, либо обоснование его выпуклости [3,50,54]. Вычисление вторых производных, равно как и доказательство выпуклости (если выпуклость действительно имеет место), особенно при нелинейных СРП, может оказаться непреодолимой задачей. Поэтому целью настоящего параграфа является разработка ДУО, основанных на вычислении только первых производных целевого функционала.

В реальных задачах оптимизации целевые функционалы не всегда бывают выпуклыми. Это означает, что они могут содержать множество локальных минимумов. Если функционал $J(u)$ имеет ограниченное количество строгих локальных минимумов на допустимом множестве U_{ad} , то глобально оптимальное управление определяется в результате сравнения значений $J(u_*)$ во всех минимизирующих точках.

Далее, при исследовании достаточных условий минимума, будем полагать, что целевой функционал J на открытом допустимом множестве U_{ad} имеет ограниченное количество строгих локальных минимумов. Введем понятие r -окрестности некоторой точки $\hat{u} \in U_{ad}$, подозреваемой на строгий локальный минимум.

Определение 3.5. Замкнутое множество с граничными точками $\rho = \hat{u} + r h \in U_{ad}(S)$ будем называть r -окрестностью точки \hat{u} . Здесь r - положительное число, h - всевозможные направления в H , $\|h\|=1$.

Такая окрестность представляет собой шар в пространстве H с центром в точке \hat{u} . Рассмотрим поведение "векторных" производных T_ρ на границе этого шара. "Радиус-вектор" $r h$ шара можно трактовать как отклонение от точки \hat{u} в точку ρ , либо как допустимое направление, шаг необходимого спуска вдоль гиперповерхности $J(u)$ из точки ρ в точку \hat{u} .

Теорема 3.2 (Достаточное условие строгого локального минимума на открытом множестве $U_{ad} \subset H(S)$). Пусть отображение $J(u)$ на U_{ad}

непрерывно и равномерно дифференцируемо по направлениям в смысле (3.22). Пусть для некоторой точки $\tilde{u} \in U_{ad}$ выполняется НУО – Теорема 3.1. Тогда, если в любой малой r -окрестности точки \tilde{u} знаки локальных значений функций $T_\rho[-h] \in H^*(S)$ на границе r -окрестности $\rho = \tilde{u} + rh$ совпадают со знаками локальных значений отклонений $rh \in H(S)$ от точки \tilde{u} для всех $h \in H: \|h\|=1$, т.е.

$$\text{sgn} T_\rho[-h] = \text{sgn} h \quad \text{на } S \quad \forall \text{ малого } r > 0, \forall h \in H: \|h\|=1, \quad (3.31)$$

то этого достаточно, чтобы точка \tilde{u} была точкой строгого локального минимума u_* отображения $J(u)$. В противном случае, если условие (3.31) выполняется не для всех $h \in H$, то точка \tilde{u} не является строго экстремальной.

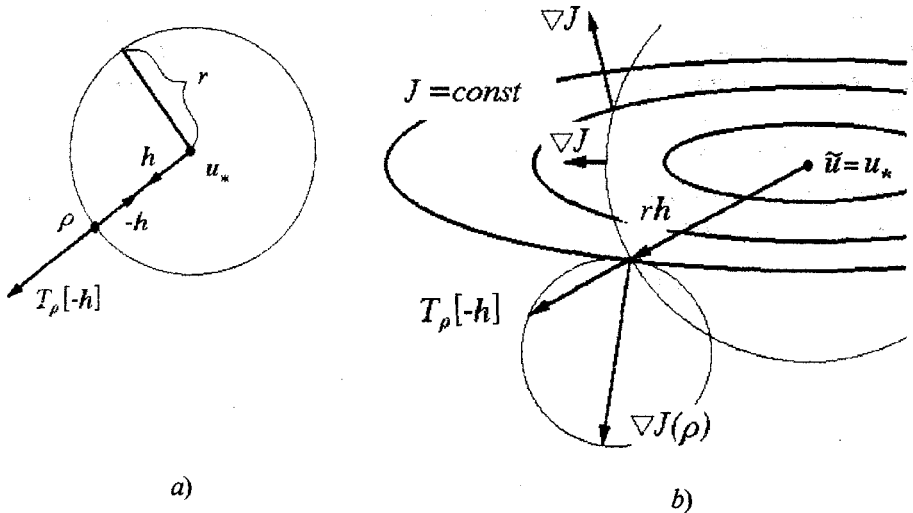


Рис. 3.7. К теореме и следствию о достаточных условиях оптимальности

Доказательство. На рис. 3.7,а для наглядности демонстрируется двухмерная аналогия ситуации, рассматриваемой в данной Теореме. Из условия (3.31) следует, что

$$(T_\rho[-h], -h) < 0 \quad \forall \text{ малого } r > 0, \forall h \in H. \quad (3.32)$$

Поскольку J на множестве $U_{\text{ад}}$ удовлетворяет условию (3.22) для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $h \in H$, то в точке $\rho \in U_{\text{ад}}$ зададим $\varepsilon = |(T_\rho[-h], -h)|$. Для всех $T_\rho[-h]$ существует такое $0 < \varepsilon < \infty$, что следует из Определения 3.1 и условия (3.31). Тогда неравенство (3.22) в любой точке $\rho = \tilde{u} + r\tilde{h}$ для направления $\delta u = -\gamma\tilde{h}$ принимает вид:

$$-2\gamma |(T_\rho[-h], -h)| < J(\rho + \delta u) - J(\rho) < 0, \quad \forall h \in H,$$

т.е. отображение J в любой точке ρ убывает по направлению $\delta u = -\gamma\tilde{h}$, проходящему через точку \tilde{u} . Поскольку радиус r -окрестности точки \tilde{u} произвольный, а отображение J непрерывно на $U_{\text{ад}}$, то точка $\tilde{u} = u_*$ — единственная точка, в которой существует наименьшее значение J в рассматриваемой окрестности.

Имеются два "противных" случая для условия (3.31).

1. Пусть для какого-либо h производная $T_\rho[-h] = 0$ на S . Следовательно, отображение J не будет ни возрастать, ни убывать при некоторых отклонениях $r\tilde{h}$ от точки \tilde{u} , поэтому точка \tilde{u} не является строго экстремальной.

2. Пусть для какого-либо h значение $\text{sgn} T_\rho[-h] = -\text{sgn} h$ на S , т.е. существует направление $\delta u = -\gamma\tilde{h}$ такое, что $(T_\rho[-h], -h) > 0$. Тогда в точке ρ будем иметь:

$$0 < J(\rho + \delta u) - J(\rho) < 2\gamma |(T_\rho[-h], -h)|, \quad \forall \text{малого } r > 0.$$

Это означает, что отображение J в точке ρ при любом малом $r > 0$ возрастает в направлении $\delta u = -\gamma\tilde{h}$, которое проходит через точку \tilde{u} . Поскольку отображение J непрерывно на $U_{\text{ад}}$, то J в точке \tilde{u} убывает в направлении $-\delta u$. Следовательно, точка \tilde{u} вообще не является экстремальной. Теорема доказана.

Замечание. Условие локальной оптимальности (локального минимума) (3.31) для традиционного представления производной по направлению типа (3.16) имеет вид:

$$J'_\rho[-h] < 0 \quad \forall \text{малого } r > 0, \quad \forall h \in H: \|h\| = 1.$$

Полученное локальное ДУО не требует ни дифференцируемости, ни выпуклости функционала J . Аналогично предыдущему параграфу рассмотрим ДУО в более практическом виде, т.е. относительно производной Фреше.

Следствие 3.2. (Достаточное условие строгого локального минимума при локальной недифференцируемости на открытом множестве $U_{\text{ад}} \subset H(S)$). Пусть непрерывное отображение $J(u)$ дифференцируемо в r -окрестности точки $\hat{u} \in U_{\text{ад}}$ быть может за исключением самой точки \hat{u} , в которой выполняется НУО - Следствие 3.1. Тогда, если на границе $\rho = \hat{u} + rh$ любой малой r -окрестности точки \hat{u} имеет место интегральное неравенство

$$(\nabla J(\rho), h) > 0 \quad \forall \text{ малого } r > 0, \forall h \in H: \|h\| = 1, \quad (3.33)$$

то этого достаточно, чтобы точка \hat{u} была точкой строгого локального минимума u_* отображения $J(u)$. В противном случае, если условие (3.33) выполняется не для всех $h \in H$, то точка \hat{u} не является строго экстремальной.

Доказательство. На рис. 3.7,б для наглядности демонстрируется соответствующая двумерная аналогия.

Рассмотрим "векторные" производные T_ρ на границе r -окрестности точки \hat{u} . Напомним, что T_ρ не может указывать направление убывания отображения J . Поэтому, для отображения, дифференцируемого в точке ρ , имеет место (см. конечномерную аналогию рис.3.6):

$$(\nabla J(\rho), T_\rho[-h]) \geq 0 \quad \forall h \in H, \quad (3.34)$$

Производная T_ρ по определению удовлетворяет одному из трех условий (см. конечномерную аналогию (3.19)):

$$(1) \quad \text{sgn} T_\rho[-h] = \text{sgn} h \quad \text{на } S;$$

$$(11) \quad \text{sgn} T_\rho[-h] = -\text{sgn} h \quad \text{на } S;$$

$$(111) \quad T_\rho[-h] = 0 \quad \text{на } S.$$

Очевидно, что неравенство (3.34) может удовлетворять требование (3.33) только при условии (1). Данное условие соответствует условию (3.31) предыдущей Теоремы. Таким образом, при неравенстве (3.33), выполняется Теорема 3.2.

Имеет место очевидное и важное дополнительное следствие. Оно устанавливает связь между локальными на S значениями функции $\nabla J \in H^*(S)$ и направлением $h \in H(S)$ на точку минимума u_* .

Следствие 3.3. Пусть выполнены почти все условия Следствия 3.2, кроме (3.33), вместо которого имеется условие

$$\operatorname{sgn} \nu J(\rho) = \operatorname{sgn} \eta \quad \text{п.в.} S \quad \forall \eta \in H, \quad (3.35)$$

то этого достаточно, чтобы точка \bar{u} была точкой строгого локального минимума u_* отображения $J(u)$.

Особенностью новых необходимых и достаточных условий оптимальности является то, что они получены относительно локальнм на S значений производных минимизируемых функционалов. Локальная форма условий оптимальности является принципиальной при их реализации прямыми экстремальными методами. Достаточные условия строгого локального минимума не требуют не только выпуклости целевого функционала, но и его дифференцируемости. Существенным фактором для численной реализации является то, что все достаточные условия минимума сформулированы относительно поведения *первых* производных в окрестности стационарной либо сингулярной точки u_* .

4. АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ С РЕГУЛИРУЕМЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ СПУСКА

4.1. Регуляризация в алгоритмах минимизации

Рассмотрим вопросы корректности задач оптимального управления и проблемы регуляризации решений в экстремальных алгоритмах оптимизации. Сформулируем кратко принципиальную постановку задачи оптимального управления СРП. Пусть управление u и состояние v СРП являются элементами бесконечномерных гильбертовых пространств, соответственно U и V . СРП запишем в виде операторного уравнения:

$$D_\tau v = 0, \quad \tau \in S, \quad (4.1)$$

где $D_\tau(\tau, v, u)$ — дифференциальный оператор по пространственно-временным переменным τ , включающий граничные условия.

Цель управления задается функционалом:

$$J(u) = \int_{S'} IdS' \longrightarrow \inf_{S'} \quad (4.2)$$

где $I(v, u)$ — заданная функция аргумента v и, возможно, u . При этом управление u может принадлежать ограниченному допустимому множеству $U_{ад} \subset U$.

Пусть прямая задача (4.1) характеризуется корректным отображением

$$U \longrightarrow V, \quad (4.3)$$

т.е., задавая любое управление в пространстве U , мы однозначно и устойчиво попадаем в соответствующий элемент пространства состояний V . Задача оптимального управления (4.1), (4.2) требует из пространства состояний V вернуться в некоторую точку u_* допустимого множества управлений, т.е.:

$$V \xrightarrow{\inf J} u_* \in U_{ад}. \quad (4.4)$$

Более подробно вопросы отображений типа (4.4) будут обсуждаться при исследовании проблемы управляемости в следующей главе.

Приведенные схемы (4.3) и (4.4) иллюстрируют принципиальные особенности задач оптимального управления. Во-первых, все задачи оптимизации являются обратными. Данное обстоятельство для задач типа синтеза оптимального управления также отмечается в работе [6]. Во-вторых, в отличие от классически обратных задач с отображением множества состояний в множество искомых параметров, здесь имеет место условное (при условии $\text{in}L$) отображение в элемент допустимого множества. Поскольку задачи оптимального управления являются обратными, то они, в общем случае, некорректны, т.е. не при любых значениях состояния (условиях, накладываемых на состояние) может корректно отыскиваться управление.

При исследовании некорректных задач А.Н.Тихонов ввел отличное от классического понятие корректности, заключающееся в требовании ограничения пространства решений (в данном случае пространства управлений U или даже множества допустимых управлений $U_{\text{ад}}$) до компактного множества \mathcal{U} существования, единственности и устойчивости [93]. Для сужения множества классически некорректных решений до компакта корректности используют регуляризирующие алгоритмы, например, [29,61,94,95].

В предыдущих главах обсуждались различные подходы для реализации отображения (4.4). Чаще всего – это итерационные градиентные алгоритмы. Покажем, что подобного рода экстремальные алгоритмы могут обеспечивать регуляризацию решения, т.е. обеспечивать принадлежность каждого нового приближения u^{k+1} к соответствующему компактному множеству корректности \mathcal{U}^{k+1} [15,100]. На каждой итерации мы должны из точки u^k корректно попасть в точку u^{k+1} . Для этого необходимо $u^{k+1} \in \mathcal{U}^{k+1}$. Именно в множестве \mathcal{U}^{k+1} мы должны искать очередное приближение управления.

Рассматриваемый прямой экстремальный подход состоит из двух, практически самостоятельных, подзадач. Первая – это определение градиента целевого функционала ∇J , и вторая – минимизация целевого функционала J на основе его градиента. Первая из этих подзадач будет подробно рассмотрена в главе 5. Здесь мы лишь отметим тот факт, что ∇J принадлежит сопряженному пространству управлений, т.е. – пространству U^* и находится через решение сопряженной задачи типа (2.5). При этом имеет место прямое отображение:

$$V^* \longrightarrow U^*. \quad (4.5)$$

Это означает, что процедура поиска $\nabla J \in U^*$ относится к проблемам классически корректных задач. Предположим, что данная традиционная задача решена. Перейдем ко второй подзадаче, т.е. к минимизации функционала J .

Для регуляризации решения на каждой итерации, согласно теории некорректных задач [94], привлечем стабилизирующий функционал в виде:

$$\Omega^k = \frac{1}{2} \int (\delta u^k)^2 dS. \quad (4.6)$$

Функционал Ω^k является штрафным функционалом, который необходимо добавлять к минимизируемому функционалу $J(u^k)$. Смысл стабилизирующего функционала Ω^k заключается в "штрафовании" решения (нового приближения) u^{k+1} при значительном отклонении δu^k от u^k , когда решение может выходить из компакта корректности U^{k+1} .

Стабилизирующий функционал (4.6) характеризует интегральное на S отклонение от управления u^k . При незначительных интегральных отклонениях могут иметь место весьма значительные локальные отклонения. Для того, чтобы контролировать не только интегральные, но и локальные отклонения на каждой итерации будем добавлять стабилизирующий функционал Ω^k к целевому функционалу J^* при помощи множителя Лагранжа $\alpha_\Omega^k(\tau)$ (параметр регуляризации), где $\tau \in S$. При этом получим сглаживающий функционал

$$T^k = J^k + \frac{1}{2} \int \alpha_\Omega^k (\delta u^k)^2 dS. \quad (4.7)$$

Согласно теории некорректных задач, минимизация сглаживающего функционала (4.7) гарантирует корректность приближенного решения задачи (4.1), (4.2) для каждой итерации при соответствующем параметре регуляризации α_Ω^k . Рассмотрим частный случай $u_s \in \text{int} U_{\text{ад}}$, т.е. случай внутреннего, а не краевого локального экстремума. Тогда НУО для функционала (4.7) - это $\delta T^k = 0$:

$$\delta T^k = \int \left[\nabla J^k + \alpha_\Omega^k \delta u^k \right] \delta u^k dS = 0,$$

где ∇J - градиент целевого функционала в оптимизационной задаче (4.1), (4.2). В силу произвольности подинтегральной функции

$\delta u^k(\tau)$ следует:

$$b^k \alpha^k \nabla J^k + \delta u^k = 0,$$

где $b^k \alpha^k = \left[\alpha_n^k \right]^{-1}$, число $b^k > 0$.

Если учесть, что $\delta u^k = u^{k+1} - u^k$, то получим следующий алгоритм для регуляризованной коррекции управления:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k. \quad (4.8)$$

В конечномерном пространстве управлений, для $u \in E^n$, алгоритм (4.8) имеет вид:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \circ \nabla J^k, \quad (4.8')$$

где \circ - прямое произведение векторов $\alpha^k \in E_n$ и $\nabla J^k \in E_n$, например, если вектор-столбец $u \in E^2$, то данное произведение для двух векторов-строк α и ∇J расписывается как

$$\alpha \circ \nabla J = (\alpha_1, \alpha_2) \circ (\nabla_1 J, \nabla_2 J) = (\alpha_1 \nabla_1 J, \alpha_2 \nabla_2 J).$$

В алгоритмах (4.8) спуск осуществляется в направлении $-\alpha^k \nabla J^k$, с глубиной шага, определяемой числом b^k . В частном случае, если $\alpha^k \equiv 1$, алгоритмы (4.8) и (4.8') являются градиентными методами.

Таким образом, алгоритм (4.8) поиска оптимального управления в классически некорректной задаче оптимизации СРП (4.1), (4.2) является регуляризирующим. Степень регуляризации на каждой итерации определяется параметрами шага b^k и α^k . Чем меньше значение b^k , тем сильнее регуляризируется решение и замедляется сходимость алгоритма. Функция $\alpha^k(\tau)$ позволяет регулировать направление спуска (характер сходимости). Алгоритмы типа (4.8) будем называть методами минимизации с регулируемым направлением спуска. Такие алгоритмы будут нами приняты далее за основу при реализации НУО и ДУО.

4.2. Реализация необходимых условий оптимальности

Как уже отмечалось ранее традиционные алгоритмы минимизации первого порядка не позволяют с достаточной точностью реализовать НУО. Напомним, что НУО в классической интегральной форме (3.28) требует от прямых экстремальных алгоритмов

$$\|\nabla J^*\| \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

а в новой локальной форме (3.30) для дифференцируемого функционала необходимо

$$\nabla J^* \rightarrow 0 \quad \text{п.в.}S. \quad (4.10)$$

Характер сходимости алгоритмов минимизации первого порядка, построенных на условия (4.9), подробно исследован в §1 предыдущей главы. Такие алгоритмы осуществляют спуск вдоль дна оврага отображения J к его минимальной отметке. Для многомерных и бесконечномерных отображений такой итерационный путь, как правило, оказывается бесконечным.

Как показано в §1 предыдущей главы, для эффективного достижения минимума многомерных образных отображений алгоритмы минимизации должны "перешагивать" многочисленные повороты линии дна. В конечномерном примере рис. 3.4 показано, что такое перешагивание в окрестность оптимального решения u_* сопровождается условием (3.12) равномерного убывания всех компонент вектора ∇J . В бесконечномерном случае при минимизации функционалов данное условие приобретает вид (4.10), которое требует равномерной (или почти всюду на S) сходимости градиента целевого функционала к нулю.

Условие (4.10) может реализовываться алгоритмами минимизации с регулируемым направлением спуска типа (4.8). При этом параметр $\alpha^k(\tau)$, $\tau \in S$ должен регулировать направление спуска в соответствии с (4.10). Поясним сказанное следующим примером.

Пусть функция $u^k(\tau)$ находится далеко от оптимального значения $u_*(\tau)$ для всех $\tau \in S$, а функция ∇J на $s \in S$ имеет существенно меньшие значения, чем на $S \setminus s$. Согласно конечномерной аналогии начального приближения типа (3.6) и соответствующего поведения градиента, следует, что функционал J имеет выраженный овражный характер. Тогда следует увеличить значение функции α^k на s для обеспечения в

алгоритме (4.8) ощутимых изменений управления $u^k(\tau)$ на S . Если не делать таких локальных коррекций, то в области S сходимость $u^k(\tau)$ к $u_*(\tau)$ будет практически отсутствовать. Это означает, что на S значение ∇J невозможно будет устремить к нулю, а весь алгоритм минимизации за конечное (разумное) число итераций сможет обеспечить вместо (4.10) всего лишь условие

$$\nabla J^k \rightarrow 0 \quad \text{п.в.} S, \quad (4.11)$$

т.е. будет отсутствовать равномерное или п.в. S стремление функции ∇J к нулю. Заметим, что при этом будет реализовываться классическое интегральное НУО (4.9).

Правильный выбор параметра $\alpha^k(\tau)$ на S , удовлетворяющий условию (4.10), позволяет осуществлять спуск к минимуму J сразу для всех (почти всех) пространственно-временных точек $\tau \in S$. Такой спуск будет реализовывать равномерную или п.в. S сходимость к точному решению $u_*(\tau)$. В конечномерном примере рис. 3.5 показана равномерная сходимость в пространстве управлений, которая обеспечивает спуск сразу по всем компонентам вектора u , а не поочередно в зависимости от приоритета чувствительности функции J к тем или иным компонентам u вектора управления. Заметим, что "правильный" выбор параметра $\alpha^k(\tau)$ с учетом чувствительности J к u для всех итераций метода (4.8) в соответствии с НУО (4.10) является не простой задачей.

Для учета разной чувствительности функционала J к управлению $u(\tau)$ можно использовать идею шаблонных приближений [100,121]. Такие приближения позволяют адаптировать алгоритм (4.8) к конкретному виду функционала J на начальных итерациях. Если при этом выпуклость функционала J остается приблизительно постоянной вдоль всей минимизирующей траектории, то начальные шаблонные приближения будут вполне достоверно отражать чувствительность J на всех последующих итерациях. В трехмерном случае рис. 3.5 постоянство выпуклости отображения J означает прямолинейность линии дна на каждом из ее участков bc и cd . Именно такой характер выпуклости функционала J , приблизительно оставшийся постоянным в процессе минимизации, мы будем предполагать далее.

Удачно адаптированный алгоритм (4.8) после шаблонных приближений приводит в относительно малую окрестность управления \hat{u}

подозреваемого на оптимальность. В этой окрестности функция ∇J существенно уменьшает свои локальные по τ значения на всей или почти всей области S . Дальнейшая минимизация должна строиться на основе ДУО, что будет рассмотрено в следующем параграфе.

Рассмотрим два способа адаптации алгоритмов минимизации с регулируемым направлением спуска при помощи шаблонных приближений. Первый эвристический способ может применяться для минимизации как дифференцируемых, так и недифференцируемых отображений. Этот способ дает рекомендации для выбора шаблонных приближений, не используя НУО (4.10), поскольку для задач негладкой оптимизации условие (4.10) не имеет места. Второй способ может применяться только для дифференцируемых отображений. Он основан на конструировании шаблонных приближений согласно НУО (4.10).

Идея шаблонных приближений заключается в следующем. Пусть приближения управления $u^k(\tau)$ и $u^{k+1}(\tau)$ описываются некоторыми известными, заранее выбранными функциями (шаблонные функции) $\phi^k(\tau)$ и $\phi^{k+1}(\tau)$, $\tau \in S$. Такие приближения будем называть *шаблонными*. Далее при помощи шаблонных приближений мы определим чувствительность функционала J к управлению u . Полученную информацию о чувствительности функционала будем хранить в параметре $\alpha(\tau)$ для того, чтобы корректировать необходимым образом направление спуска на последующих итерациях. При этом алгоритм (4.8) превратится в алгоритм адаптированный для минимизации конкретного функционала.

Для адаптации алгоритма минимизации на первых итерациях будем использовать следующий метод шаблонных приближений:

$$u^{k+1} = \phi^k - \beta^k \nabla J^k \quad \text{п.в.} S, \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.12)$$

$$\text{где} \quad \beta^k(\tau) = \left| \frac{\phi^{k+1}(\tau) - \phi^k(\tau)}{\nabla J^k(\tau)} \right| \quad \text{п.в.} S. \quad (4.13)$$

Предполагается, что на данных итерациях $\nabla J^k \neq 0$ п.в. S .

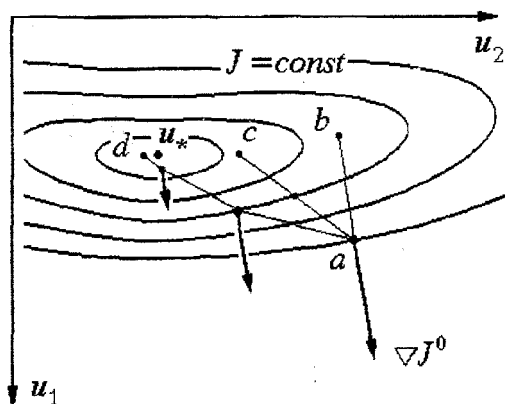
Параметр β^k обеспечивает заданное шаблонное приближение $u^{k+1} = \phi^{k+1}$, т.е. он реализует заранее выбранное направление спуска при любом значении градиента ∇J^k . Таким образом, функция $\beta^k(\tau)$ будет учитывать чувствительность функционала J и на начальных итерациях гарантировать желаемое изменение управления $u(\tau)$ п.в. S .

Перейдем к обсуждению проблемы выбора шаблонов ϕ^k , ϕ^{k+1} . В первом способе адаптации алгоритма минимизации шаблонные аппрокси-

матрицы ϕ^k , ϕ^{k+1} должны выбираться из требования оптимального (вполне злементарного) изменения управления на всем пространственно-временном множестве S . Например, если управление не закреплено ни в какой точке $t \in S$, то в качестве таких шаблонов можно выбрать постоянные по t функции [100, 121]. Если управление закреплено в какой-либо точке $t \in S$, то в качестве шаблонов можно выбрать линейные по t функции с изменяющимся углом наклона и всегда выходящие из одной и той же заданной точки закрепления [32]. В этих случаях не используется новое НУО - Теорема 3.1 в локальной форме (3.30) или (4.10) для стационарной точки.

На рис. 4.1 демонстрируется двухмерная аналогия обсуждаемой ситуации. Линия ab - это траектория традиционного спуска градиентным методом из начального приближения (точка a), далеко отстоящего по каждой компоненте u_1 , u_2 от оптимального значения $u_* = \{u_{*1}, u_{*2}\}$, в точку b , лежащую на дне оврага и близко стоящую к u_* только по одной компоненте u_1 . В данном случае спуск реализуется поочередно по каждой компоненте управления в зависимости от приоритета чувствительности J к компонентам вектора u , т.е. спуск соответствует алгоритму (3.7), (3.8), подробно описанному в §1 главы 3.

Рис. 4.1. Спуск на дно оврага двухмерной функции:
 ab - методом наискорейшего спуска (реализация традиционной формы НУО);
 ac - шаблонными приближениями без учета локальной формы НУО;
 ad - шаблонными приближениями с учетом локальной формы НУО.



Линия ac — это шаблонный спуск под углом 45° относительно осей координат u_1, u_2 . Данный спуск обеспечивает существенное (равное) изменение вектора управления u по каждой из его компонент на всех итерациях метода (4.12) и приводит шаблонные приближения в точку c , лежащую на дне оврага. В бесконечномерном случае такой спуск эквивалентен постоянным по τ изменениям шаблонных приближений. Здесь в каждой точке $\tau \in S$ значение функции $u(\tau)$ изменяется одинаково.

Очевидно, что такой способ выбора шаблонов не учитывает ни степени, ни характера выпуклости функционала J . Он не может гарантировать быстрое попадание алгоритмом (4.12) в достаточно малую окрестность минимума u_* даже для квадратичного выпуклого функционала. Однако, он гарантирует спуск к u_* не вдоль бесконечной линии для овражного функционала, а сразу по всем пространственно-временным точкам $\tau \in S$. Такой спуск будет равномерным в пространстве управлений, но в общем случае не будет обладать наилучшей скоростью сходимости.

Рассмотрим второй способ выбора шаблонных приближений. Для дифференцируемых функционалов такие приближения относительно стационарной точки должны удовлетворять локальной форме НУО — Теорема 3.1, или Следствие 3.1, или условию (4.10). Это означает, что при итерации от $\phi^k(\tau)$ к $\phi^{k+1}(\tau)$ функция ∇J^k должна уменьшаться равномерно, в одинаковое число раз для всех (почти всех) точек $\tau \in S$.

В конечномерном примере рис. 4.1 такие шаблонные приближения соответствуют траектории ad . Здесь каждая компонента вектора-градиента $\nabla J(u^k)$ уменьшается в одинаковое число раз на каждой итерации метода (4.12). При этом все векторы ∇J^k коллинеарны друг другу. Очевидно, что если отображение J является квадратичным и выпуклым, то траектория ad будет прямой линией, заканчивающейся в точке u_* . В противном случае, когда J является всего лишь приблизительно квадратичным отображением (каждый участок линии дна может иметь незначительное искривление), траектория ad будет заканчиваться на дне отображения J не в точке минимума u_* , а вблизи нее.

Видно, что траектория ad , основанная на новом НУО, практически всегда лучше траектории ac и тем более траектории ab . Шаблонный спуск ad приводит в малую окрестность оптимального управления, если отображение J близко к квадратичному. Отметим, что точное удовлетворение условия пропорциональности уменьшения компонент вектора-

градиента ∇J^k для реализации локальной формы НУО не обязательно и вряд ли возможно, особенно в бесконечномерном случае. Как показывают тестовые расчеты главы 6 оба описанных способа выбора шаблонных приближений дают принципиально лучшие результаты по сравнению с традиционными траекториями спуска.

Любой из шаблонных спусков по методу (4.12), (4.13) необходимо заканчивать при подходе ко дну оврага. Еще раз отметим, что шаблонный спуск с НУО (4.10) обеспечивает приближение ко дну в относительно малой окрестности оптимального управления u_* или управления \tilde{u} подозреваемого на оптимальность.

Согласно критерию овражности (3.11) равномерный спуск вдали от дна оврага сопровождается условием:

$$\operatorname{sgn} \nabla J^k = \operatorname{sgn} \nabla J^0 \quad \text{п.в.} S \quad (4.14)$$

Нарушение данного условия означает попадание в область дна оврага. Поэтому при нарушении условия (4.14) шаблонный спуск следует заканчивать. Информацию о чувствительности функционала J , содержащуюся в параметре β^k , можно использовать для дальнейшего регулирования направления спуска по алгоритмам типа (4.8), начиная с предыдущей итерации еще не лежащей на дне оврага, т.е. принимаем

$$\alpha^{k-1}(\tau) = \beta^{k-2}(\tau). \quad (4.15)$$

Следующие итерации могут выполняться с неизменяющимся параметром α методом минимизации со спуском, регулируемым относительно градиента:

$$u^{k+1} = u^k - \delta^k \alpha^k \nabla J^k, \quad \text{п.в.} S \quad (4.16)$$

или со спуском, регулируемым относительно сопряженных градиентов:

$$u^{k+1} = u^k - \delta^k \alpha^k p^k, \quad \text{п.в.} S \quad (4.17)$$

где $p^k = \nabla J^k + \|\nabla J^k\|^2 / \|\nabla J^{k-1}\|^2 \cdot p^{k-1}$, $p^0 = \nabla J^k$, α^k - п.в. S положительная и ограниченная функция.

Алгоритм (4.17) обладает более высокой скоростью сходимости по сравнению с алгоритмом (4.16). Необходимо помнить, что алгоритм

(4.17) требует периодического "очистения" направления спуска от накапливающихся погрешностей, т.е. в процессе минимизации необходимо иногда задавать направление спуска $p^k = \nabla J^k$.

Описанные методы выбора параметра $\alpha(\tau)$ при помощи шаблонных аппроксимаций позволяют не только сократить путь к оптимальному управлению, но и исключить некоторые погрешности вычислений и возможных экспериментальных данных. Многие погрешности в вычислении градиента целевого функционала ∇J , согласно формуле (4.13), учитываются (адаптируются) функцией $\beta(\tau)$, а следовательно, и функцией $\alpha(\tau)$ в алгоритмах минимизации (4.16), (4.17). Как показывают тестовые расчеты главы 6, такая адаптация к погрешностям оказывается очень эффективной.

Глубина спуска на каждой итерации вдоль выбранного направления минимизации определяется числом b^k . Данное число можно выбрать из условия типа (2.15) оптимальной длины шага. Однако, как указывалось ранее, реализация данного условия для СРП резко снижает эффективность экстремальных алгоритмов. Целесообразно использовать простой и эффективный метод выбора длины шага, описанный в §5 главы 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, \quad b_1 \geq 1; \\ \text{если } J^k \geq J^{k-1}, \text{ тогда повторяется предыдущая} \\ \text{итерация при } b^{k-1} = b_2 b^{k-2}, \quad b_2 < 1/b_1. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Если метод (4.18) используется совместно с алгоритмом (4.17), то нижнюю строку в (4.18) следует дополнить условием $p^{k-1} = \nabla J^{k-1}$.

Рассмотренные методы (4.16) - (4.18) реализации НУО предназначены для поиска стационарных точек целевого функционала. Критерием достижимости стационарной точки в данных методах является следующее необходимое условие:

$$\nabla J(u^k) = 0 \quad \text{п.в.С.} \quad (4.19)$$

При этом алгоритмы (4.16) и (4.17) прекращают свою сходимость.

Рассмотрим случай сингулярного оптимального управления. Согласно НУО (3.30) здесь $\nabla J(u_*)$ не существует. Для реализации на компьютере данного НУО можно использовать, например, алгоритм (4.16). Однако, при этом в каждой сингулярной точке необходимо

искусственно вводить какое-либо значение ∇J , т.к. обработка неопределенных величин может приводить к неопределенным результатам.

Например, для явно заданного функционала

$$J = \int_S |u| dS$$

имеем $\nabla J(u) = \text{sgn } u$. Управление $u_* = 0$ на S является сингулярным, оно доставляет строгий минимум функционалу J . Здесь $\nabla J(u_*)$ не существует. Однако операцию "sgn" формально доопределяют условием $\text{sgn} 0 = 0$. Принимая во внимание данное условие, мы получаем для рассматриваемого примера следующее значение градиента:

$$\nabla J(u_*) = 0 \quad \text{на } S.$$

Заметим, что в данном примере любое управление, которое пересекает на множестве ненулевой меры полученную сингулярную функцию $u_*(\tau)$, также будет сингулярным. Иначе, любое управление $\tilde{u}(\tau)$ будет сингулярным, если $u_*(\tau) \cap \tilde{u}(\tau) \neq \emptyset$ при $\tau \in S$, где S имеет ненулевую меру. Таким образом, негладкий целевой функционал даже с единственным строгим минимумом может содержать множество сингулярных управлений $U^* \subset U_{\text{ад}}$. Особенности множества U^* является следующее. Во-первых все элементы U^* , включая u_* , согласно Теореме 3.1, являются подозрительными на оптимальность, во-вторых, градиент ∇J на U^* не существует. Для построения минимизирующих алгоритмов в подобных ситуациях нам потребуется ввести следующее соглашение.

Аксиома 4.1. Пусть отображение $J(u)$ во всех сингулярных точках имеет нулевое значение градиента, т.е.

$$\nabla J(\tilde{u}^k) = 0 \quad \text{п.в.} S \quad \forall \tilde{u}^k \in U^*,$$

где \tilde{u}^k - сингулярное управление на итерации k .

С учетом принятой аксиомы НУО сингулярной точки формально совпадает с НУО (4.19) стационарной точки. Однако необходимо иметь ввиду, что точное выполнение условия (4.19) на компьютере практически невозможно. Приблизительная же реализация (4.19) для

сингулярной и стационарной точек, в общем случае, носит разный характер.

Если оптимальное управление u_* - не строго сингулярная точка, то существует такое направление, вдоль которого сходимость $u^k \rightarrow u_*$ будет осуществляться при условии (4.9) или (4.10). В этом случае и НУО и характер сходимости будут обладать свойствами стационарной точки. В общем случае для произвольного направления, а при строго сингулярном оптимальном управлении - для любого направления, условия (4.9), (4.10) не имеют места. Здесь градиент ∇J в окрестности u_* обладает свойством (3.29):

$$|\nabla J(u_* + \delta u)| > \varepsilon \quad \text{п.в. } S \in S, \quad \exists \varepsilon > 0,$$

$$\delta u = \gamma \bar{u}, \quad \gamma \rightarrow +0.$$

Таким образом, при приближении к оптимальному сингулярному управлению в общем случае $\|\nabla J^k\| \rightarrow 0$. Поскольку в методе (4.18) параметр, регулирующий глубину спуска - $b_1 \geq 1$, то найдутся итерации, на которых будет иметь место перескакивание через сингулярную точку. Согласно методу (4.18), при каждом перескакивании через сингулярное оптимальное управление u_* с условием $J^k \geq J^{k+1}$, "принимается решение" об уменьшении длины шагов вплоть до условия

$$\delta^k = 0. \quad (4.20)$$

При этом алгоритм (4.16) прекращает свою сходимость.

С учетом сформулированной выше аксиомы, условия (4.19) и (4.20) можно считать выражением НУО для стационарного и сингулярного управлений, отыскиваемых методом (4.16), (4.18). Заметим, что сингулярное управление может реализовываться либо с условием (4.19), либо с условием (4.20), либо совместно (4.19) с (4.20), если число b_1 метода (4.18) достаточно большое и приводит к слишком частым перескакиваниям через нестрого сингулярную точку u_* .

Необходимо иметь в виду, что согласно выводам предыдущего параграфа, условие (4.20) может быть всего лишь выражением максимальной регуляризации алгоритма минимизации в некоторой сингулярной точке $\hat{u}^k \in J^*$, $\hat{u}^k \neq u_*$. Такая ситуация может иметь место при неустойчивости алгоритма в выбранном направлении минимизации.

При этом сингулярная точка \hat{u}^* может и не быть экстремальной. Для разрешения подобных ситуаций необходимо регулировать направление спуска с учетом ДУО.

Таким образом, локальная форма НУО для экстремальных алгоритмов представляет собой принципиально новое условие для выбора направлений минимизации дифференцируемых целевых функционалов. Идея шаблонных аппроксимаций позволяет реализовывать локальную форму НУО и добиваться равномерной или п.в.С сходимости в пространстве управлений. НУО недифференцируемых функционалов позволяет минимизировать целевые функционалы на основе их градиента, не прибегая к теории субдифференциалов.

Описанные методы реализации НУО обладают быстрой сходимостью в относительно малую окрестность оптимального управления. Благодаря шаблонным приближениям в начале минимизации такие методы эффективно компенсируют возможные погрешности вычисления градиента целевого функционала. Однако, вблизи оптимального управления рассмотренные методы могут терять свою эффективность. В любом случае точная реализация НУО на компьютере практически невозможна, а всякая приближительная реализация не гарантирует достаточную близость к оптимальному управлению. Кроме того, не всякое стационарное и тем более сингулярное управление является оптимальными. Здесь для достижения оптимального управления с достаточной точностью необходимо использовать алгоритмы минимизации, построенные не только на НУО, но и на ДУО. Данные вопросы рассматриваются в следующем параграфе.

4.3. Учет достаточных условий оптимальности

Алгоритмы (4.16), (4.17) с адаптивным методом (4.12) - (4.14) обладают быстрой равномерной сходимостью на начальных итерациях. Вблизи же управления \hat{u} , подозреваемого на строгий локальный минимум, они могут терять свою эффективность. Здесь чувствительность функционала J к управлению u может иметь иной характер, чем на начальных итерациях, где выбиралась функция $\alpha^*(\tau)$. Как указывалось в конце предыдущего параграфа, для достижения оптимального управления с достаточной точностью, в окрестности каждого \hat{u} необходимо использовать ДУО.

Согласно ДУО - Теорема 3.2 в форме (3.33) и (3.35) необходимо, чтобы в окрестности управления \hat{u} , подозреваемого на строгий локальный минимум, имело место какое-либо из соответствующих условий:

$$(\nabla J(u^k), h^k) > 0 \quad \forall \text{ малого } r^k > 0, \forall h^k, \quad (4.21)$$

$$\text{sgn } \nabla J(u^k) = \text{sgn } h^k \text{ п.в.С.}, \quad \forall \text{ малого } r^k > 0, \forall h^k, \quad (4.22)$$

где $u^k = \hat{u} + r^k h^k$, h^k - единичный "вектор" в пространстве управлений, выходящий из точки \hat{u} в направлении u^k . При выполнении условий (4.21), (4.22) управление $\hat{u} = u_*$.

Очевидно, что любыми численными алгоритмами точная реализация ДУО в форме (4.21), (4.22) невозможна, поскольку условия " $\nabla J(u^k) > 0$, $\forall h^k$ " требуют бесконечно большого числа итераций даже для двухмерной задачи минимизации. Кроме того, заранее найти точное значение h^k невозможно. Поэтому далее будет идти речь не о реализации ДУО различными экстремальными алгоритмами, а о конструировании экстремальных алгоритмов, учитывающих ДУО (4.21) или (4.22).

Для учета условий (4.21), (4.22) будем организовывать спуск в окрестности \hat{u} прыжками вокруг \hat{u} при $u^k \rightarrow \hat{u}$. Такие прыжки необходимы для организации перебора наибольшего числа существенно различных вариантов h^k при $r^k \rightarrow 0$. Заметим, что традиционные градиентные методы в непосредственной близости от \hat{u} осуществляют спуск при $h^k \sim \text{const}$ (см. конечномерную аналогию рис. 3.1).

Для организации прыжков, сходящихся к u_* , необходимо определять $r^k h^k$ согласно условиям (4.22) и (4.21). Предположим, что мы умеем определять такие значения b^k и α^k в алгоритмах (4.16), (4.17), которые обеспечивают спуск из малой окрестности некоторого управления \hat{u} к точке \hat{u} . Это означает, что

$$r^k h^k = b^k \alpha^k \nabla J^k, \quad (4.23)$$

$$r^k h^k = b^k \alpha^k p^k, \quad (4.24)$$

где p^k - направление сопряженных градиентов. Предположение (4.23) не противоречит ДУО (4.22), с учетом того, что $\alpha^k(\tau) > 0$ п.в.С. Предположение (4.24) не противоречит ДУО (4.21) при дополнительном

условии:

$$(\forall \lambda^k, \alpha^k \rho^k) > 0. \quad (4.25)$$

Указанные предположения позволяют использовать алгоритмы (4.16), (4.17) с регулируемым направлением спуска не только для реализации НУО и достижения равномерной сходимости в малую окрестность \hat{y} , но и вблизи \hat{y} для поиска оптимального управления с учетом ДУО.

Точная реализация условий (4.23), (4.24) не только невозможна, но и, как будет показано далее, нежелательна. Для приближительной реализации данных условий будем далее использовать алгоритмы (4.16) - (4.18).

Требование приближительной реализации (4.23), (4.24) является принципиальным для организации спуска к \hat{y} в виде прыжков вокруг \hat{y} . На рис. 4.2,а демонстрируется спуск к оптимальному управлению u_* с прыжками вокруг u_* для случая двумерного отображения J . На рис. 4.2,б показаны соответствующие r -окрестности u_* . Здесь $r^k \rightarrow 0$, а λ^k за последние 4 итерации имеет существенно разнообразные варианты направлений. Согласно последнему рисунку можно с большой уверенностью утверждать, что найденное управление является оптимальным или лежит очень близко к оптимальному и не является точкой перегиба или точкой нестрогого минимума J .

При приближительной реализации условий (4.23) и (4.24) с заданным параметром α^k все прыжки вокруг \hat{y} регулируются числом b^k . Данное число можно выбирать по методу (4.18) с достаточно большим b_1 , гарантирующим перепрыгивания через дно оврага на некоторых итерациях вблизи \hat{y} . Чем больше будет таких перепрыгиваний (чем больше число b_1), тем лучше будет учитываться условие " $\forall \lambda^k$ " в (4.21), (4.22), однако, тем медленнее будет сходимость к \hat{y} . Метод (4.18) в данном случае нельзя называть приближительной реализацией метода (2.15) оптимальной длины шага минимизации, как это делалось в последнем параграфе главы 2. Метод (2.15) в принципе не применим для реализации ДУО, поскольку он не реализует перепрыгивания через дно оврага и любую точку \hat{y} , подозреваемую на минимум.

Для организации перепрыгивания через дно оврага можно использовать информацию (3.11) о поведении ∇J вблизи дна оврага. Согласно (3.11) необходимо задавать число b_1 в методе (4.18) из

условия [96,120,121]

$$b_1: \operatorname{sgn} \nabla J^{k+1} \neq \operatorname{sgn} \nabla J^k \text{ п.в.} S \text{ для некоторых итераций (4.26) вблизи } \hat{u}.$$

Заметим, что при любом числе b_1 нижняя строка в (4.18) обеспечивает устойчивость алгоритма минимизации, т.е. при $\hat{u}=u_*$ она контролирует выполнение части ДУО: " $\nabla J^k \rightarrow 0$ ".

Условие (4.26) требует разворота направления минимизации на противоположное или близкое к противоположному. При реализации условия (4.26) на итерации k скалярное произведение градиента ∇J^k и очередного градиента ∇J^{k+1} принимает значение

$$(\nabla J^{k+1}, \nabla J^k) \approx -\|\nabla J^{k+1}\| \cdot \|\nabla J^k\|.$$

Точное равенство соответствует точной противоположности направлений градиентов ∇J^{k+1} и ∇J^k .

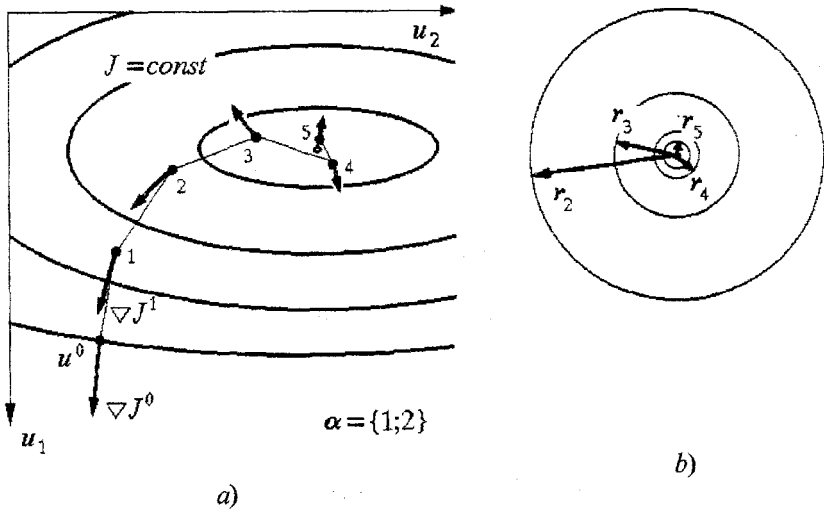


Рис. 4.2. Минимизация двухмерной функции методом с регулируемым направлением спуска:

- a) - траектория спуска;
- b) - r -окрестности точки минимума

Конкретная реализация условия (4.26) заключается в контроле поведения ∇J на последних итерациях. Если хотя бы на одной итерации функция ∇J меняет знаки п.в.С, следовательно, b_1 было выбрано удачно.

Итак, окончательно запишем полученные алгоритмы минимизации, учитывающие ДУО:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k \quad \text{п.в.С,} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} \text{если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, & b_1 \geq 1; \\ \text{если } J^k \geq J^{k-1}, \text{ тогда повторяется предыдущая} \\ \text{итерация при } b^{k-1} = b_2 b^{k-2} & b_2 < 1/b_1. \end{cases}$$

$$b_1: \operatorname{sgn} \nabla J^{k+1} \neq \operatorname{sgn} \nabla J^k \quad \text{п.в.С для некоторых итераций вблизи } \hat{u}.$$

Метод (4.27) может применяться для поиска как стационарных, так и сингулярных оптимальных управлений.

Следующий метод имеет более высокую скорость сходимости. Его следует применять для дифференцируемых функционалов:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k p^k \quad \text{п.в.С,} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} \text{если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, & b_1 \geq 1, \\ \text{если } J^k \geq J^{k-1} \text{ или } (\nabla J^k, \alpha^k p^k) \leq 0, \text{ тогда повторяется} \\ \text{предыдущая итерация при} \\ b^{k-1} = b_2 b^{k-2}, & p^{k-1} = \nabla J^{k-1}, \\ b_2 < 1/b_1. \end{cases}$$

$$b_1: \operatorname{sgn} \nabla J^{k+1} \neq \operatorname{sgn} \nabla J^k \quad \text{п.в.С для некоторых итераций вблизи } \hat{u},$$

$$p^k = \nabla J^k + \|\nabla J^k\|^2 / \|\nabla J^{k-1}\|^2 p^{k-1}, \quad p^0 = \nabla J^k.$$

Если управление \hat{u} , подозреваемое на строгий локальный минимум, является всего лишь точкой перегиба (см. двухмерную аналогию

рис. 4.3,а), т.е. $\tilde{u} \neq u_*$, то имеется большая вероятность по сравнению с традиционными экстремальными методами, что для некоторого приближения u^k (на рис. 4.3,а - для итерации $k=4$) направление ∇J^k не будет удовлетворять ДУО (4.21). Это означает, что условия (4.23), (4.24) не будут реализовываться принципиально для рассматриваемой точки \tilde{u} . При этом очередной шаг приведет не в более малую окрестность точки \tilde{u} , а напротив, удалит нас от управления \tilde{u} , подозреваемого на оптимальность. Начнется спуск к новой точке \tilde{u} . Никаких дополнительных нестандартных мер алгоритмы (4.27), (4.28) в этом случае не требуют.

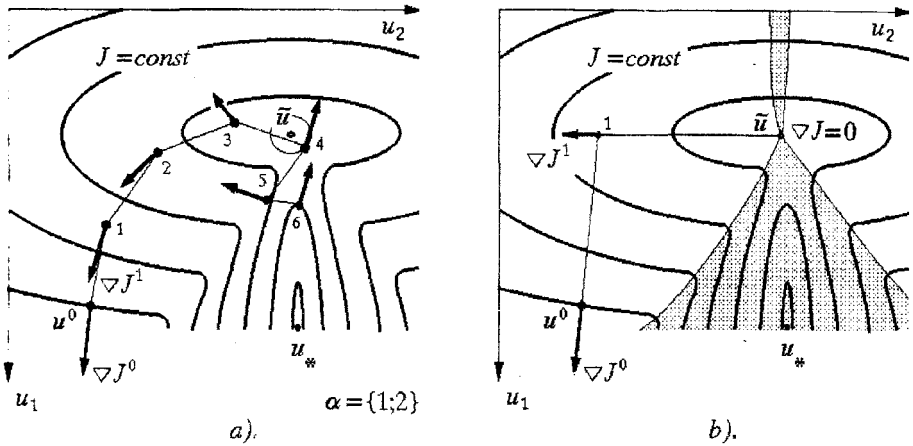


Рис. 4.3. Минимизация функции с точкой перегиба \tilde{u} :

- а) - методом с регулируемым направлением спуска и учетом ДУО;
- б) - методом наискорейшего спуска

На рис 4.3,б показан случай минимизации той же функции J с точкой перегиба \tilde{u} традиционным методом наискорейшего спуска (МНС), естественно, не учитывающим ДУО. Видно, что этот экстремальный метод ведет к точке перегиба \tilde{u} , а не к точке минимума u_* . Традиционные градиентные методы для рассматриваемой функции J

могут привести к точке минимума только при удачном начальном приближении, а именно, при u^0 - из серой области рис.4.3,б.

Если же управление \tilde{u} является точкой не строгого минимума, т.е. опять-таки $\tilde{u} \neq u_*$, то вместо приближения или удаления от рассматриваемой точки \tilde{u} произойдет абсолютно точная реализация НУО (4.19), что для строгого минимума имеет практически нулевую вероятность. Такую особенность необходимо дополнительно обследовать несколькими специальными итерациями.

Если исследуемая точка \tilde{u} является сингулярной, то в этом случае *градиентные методы могут* применяться но только с соответствующей адаптацией НУО, а именно в сочетании с методами типа (4.18) выбора параметра δ^k , регулирующего глубину шагов спуска, и с дополнительным НУО (4.20): $\delta^k=0$, $u^k=u_*$.

На рис. 4.4,а для двумерной недифференцируемой вдоль линии дна AB функции показаны слева и справа траектории спуска градиентным методом с постоянным параметром $\delta^k=const$ и МНС, где $\delta^k = \arg \min(u^k - \delta \alpha^k \nabla J^k)$, соответственно. Реализация НУО происходит

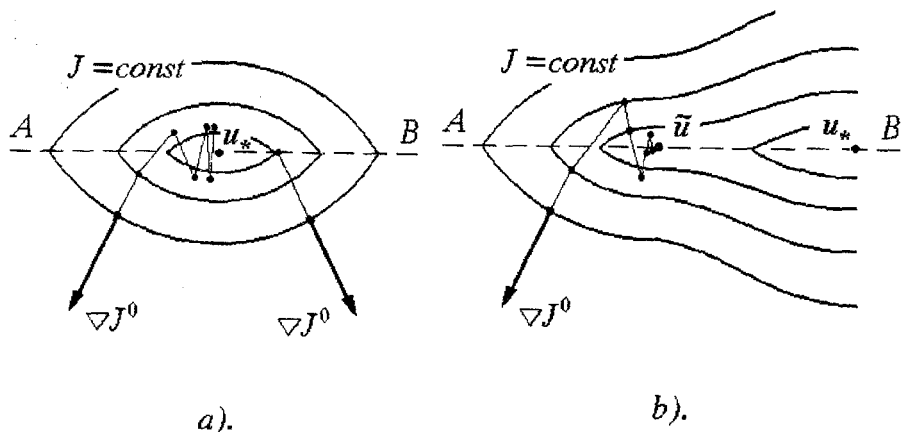


Рис. 4.4. Минимизация недифференцируемых функций градиентными методами

при попадании на линию AB . Первый алгоритм минимизации ($\delta^k=const$) никогда не реализует НУО, он бесконечно осциллирует поперек линии

дна. Второй алгоритм – после первой же итерации реализует НУО, однако, он не обеспечивает сходимость к оптимальному управлению u_* . Итерации вдоль линии дна AB градиентными методами невозможны поскольку здесь не существует градиент, или согласно Аксиоме 4.1 предыдущего параграфа здесь $\nabla J=0$. Реализация НУО градиентным МНС ни в коей мере не гарантирует достижение оптимального решения, необходимо учитывать ДУО, однако, данный метод не может это делать в принципе.

На рис 4.4,б показана траектория спуска градиентным методом с параметром δ^k по методу (4.18). Видно, что такой (нетрадиционный) градиентный метод обеспечивает сходимость к точке \tilde{u} аналогичной предыдущему рисунку. Если бы функция рис. 4.4,б была выпуклой, то этого было бы достаточно для достижения оптимального управления $\tilde{u}=u_*$, однако, в данном примере целевая функция J не выпуклая и $\tilde{u} \neq u_*$. Линия дна в точке \tilde{u} на гиперповерхности J имеет перегиб, а не локальный минимум. Очевидно, что для того, чтобы уйти от точки \tilde{u} к оптимальной точке u_* , необходимо использовать ДУО, т.е. осуществлять спуск к точке \tilde{u} прыжками вокруг нее при условии (4.21).

Для организации прыжков, например, вокруг строго сингулярной точки можно использовать метод (4.27) или же какой-либо иной метод, основанный на НУО – Следствие 3.1:

$$\left| \nabla J(u_* + r^k h^k) \right| > \varepsilon > 0 \quad \text{п.в. } s \in S \quad \forall \text{ малого } r^k > 0, \forall h^k.$$

Данное условие утверждает, что при $\delta^k \approx \text{const}$ всегда найдется итерация, для которой будет иметь место перепрыгивание через строго сингулярную точку. Для обеспечения устойчивости после каждого перепрыгивания необходимо уменьшать шаги, поскольку здесь для любых малых r^k $\|\nabla J^k\| \rightarrow \infty \rightarrow 0$. Это можно делать уменьшением значения не только δ^k , но и α^k .

Для более полного учета ДУО (4.22) целесообразно на всех итерациях вблизи \tilde{u} немного изменять функцию α в направлениях (4.23), особенно, если начальное значение $\alpha=1$ (см. пример неудовлетворительной сходимости без ДУО – рис. 4.4,б). Напомним, что, чем хуже выполняется условие (4.23), не нарушая при этом (4.21), тем лучше учитывается ДУО. Однако при этом снижается скорость сходимости.

Если уменьшение итерационных шагов осуществлять непропорциональным изменением функции $\alpha(\tau)$ на S при $b^k=1$, то мы получим следующий метод оптимизации для строго сингулярных управлений [96, 1211]:

$$u^{k+1} = u^k - b^0 \alpha^k \nabla J^k \quad \text{п.в.}S, \quad (4.29)$$

$$\alpha^k(\tau) = \begin{cases} \alpha^{k-1}(\tau), & \text{если } \text{sgn} \nabla J^k = \text{sgn} \nabla J^{k-1}, \\ b_0 \alpha^{k-1}(\tau), & \text{если } \text{sgn} \nabla J^k \neq \text{sgn} \nabla J^{k-1}, \quad 0 < b_0 < 1. \end{cases}$$

Здесь после каждой итерации в области дна оврага происходит перерегулирование направления спуска и уменьшение длины шагов.

Число b_0 определяет устойчивость алгоритма и степень реализации ДУО. При больших b_0 может появиться неустойчивость минимизации, если функционал J не является достаточно выпуклым в окрестности минимума. В этом случае глубина шагов $b^0 \|\alpha^k \nabla J^k\|$ может оказываться всегда больше расстояния до минимума $\|u^k - u_*\|$, что будет приводить к раскачиванию траектории спуска относительно точки u_* . При малых b_0 возможно резкое снижение скорости сходимости из-за существенного изменения параметром α направления минимизации и, как следствие этого, — чрезмерное количество прыжков вокруг минимума.

Число b^0 можно выбирать из условия максимального изменения управления после первой итерации на $5+25\%$. Например, если управление не закреплено на S , то можно принять

$$b^0 = \min_{\tau} \left| \frac{0.05 + 0.25 u^0(\tau)}{\nabla J^0(\tau)} \right|. \quad (4.30)$$

Очевидно, что НУО для алгоритма (4.29) имеет вид:

$$\alpha^k = 0 \quad \text{п.в.}S. \quad (4.31)$$

Таким образом, новые ДУО определяют новый характер минимизации целевых функционалов в окрестности стационарных и сингулярных точек. ДУО задают прыжки вокруг управления, подозреваемого на оптимальность. Такие прыжки позволяют избежать

сходимости алгоритмов в точках перегиба и неэкстремальных сингулярных точках функционалов. Алгоритмы, построенные на новых ДУО, позволяют исследовать целевые функционалы в окрестности минимумов с разных направлений на точку минимума. Реализация последнего обстоятельства при малых шагах позволяет достаточно близко подходить к оптимальному управлению, используя при этом только первые производные целевого функционала.

При минимизации негладких целевых функционалов необходимо иметь ввиду следующее. В малой окрестности оптимального сингулярного управления u_* может находиться бесконечно много неоптимальных сингулярных управлений $\tilde{u} \in U^*$. При спуске к u_* мы можем попасть в одну из таких точек \tilde{u} , где применение Аксиомы 4.1 приведет к точной реализации НУО (4.19) и к завершению сходимости алгоритма минимизации. В подобных случаях (случай точной реализации НУО как для гладких, так и для негладких функционалов) необходимы дополнительные принудительные итерации в соответствии с ДУО (4.21). Однако, при работе с вещественными числами на современных компьютерах вероятность таких событий практически равна нулю. Это означает, что Аксиома 4.1 носит скорее теоретический характер, чем практический.

В данном и предыдущем параграфах были предложены экстремальные методы, построенные на новых НУО и ДУО. Разумеется, предложенные методы не являются исчерпывающими. Целью данных параграфов была лишь общая демонстрация и некоторые рекомендации для реализации новых условий оптимальности. Конкретные демонстрации эффективности полученных алгоритмов в задачах оптимизации СРП приводятся в последней главе.

4.4. Оптимизация с ограничениями

В первой главе обсуждались различные задачи оптимизации СРП. Почти во всех постановках задач оптимального управления (§§ 1,3,4) присутствовали ограничения на управление и на состояние СРП, т.е. пространства управлений U и состояний V сужались до некоторых допустимых множеств $U_{ад}$ и $V_{ад}$. Такие ограничения выдвигаются техническими, экономическими требованиями, соображениями безопасности при управлении распределенными объектами. Целью настоящего параграфа является демонстрация, а в ряде случаев - разработка,

методов учета различных ограничений при решении задач оптимизации СРП прямым экстремальным подходом.

Во-первых соберем воедино и перечислим все ограничения, о которых шла речь.

1. Самое распространенное ограничение - это ограничение на множество допустимых управлений: $u \in U_{ad}$. Такое множество, обычно, представляет собой множество всех функций-управлений $u(\tau)$, не выходящих за пределы заданного максимального и/или минимального значения управляющей функции:

$$U_{ad} = \{u: u_{\min} \leq u(\tau) \leq u_{\max}\}. \quad (4.32)$$

2. Интегральное ограничение в виде изопериметрического условия:

$$\int_S u(\tau) dS = K, \quad (4.33)$$

где K - заданная изопериметрическая постоянная.

Здесь допустимое множество управлений U_{ad} - это подпространство функций $u(\tau)$, удовлетворяющих интегральному условию (4.33). При этом имеет место вложение пространств

$$U_{ad} \subset U.$$

3. Ограничение на класс функций. Пространство допустимых управлений может состоять из множества, подпространства U_{ad} кусочно-постоянных функций с заданными моментами времени возможных разрывов.

Подобный класс управлений в принципе максимума называется игольчатым. Некоторые авторы утверждают [см., например, 24], что экстремальные алгоритмы, и, в частности, градиентный метод, не способны реализовывать решение в классе игольчатых управлений, что игольчатые управления - это одно из преимуществ принципа максимума. Однако, это не так. Ниже будет показано, что для поиска управлений в классе кусочно-постоянных функций могут с успехом применяться экстремальные алгоритмы. При этом требуются некоторые преобразования пространств управлений, но не в сторону усложнения,

а напротив - в сторону упрощения задачи оптимизации, а именно, - в сторону снижения размерности пространства управлений.

В рассматриваемом типе ограничений функция $u(t)$ считается закрепленной, в частности, нулевой на множествах $S_i = (t_i, t_i + \Delta t_i) \times x_0$ и незакрепленной, но постоянной - на остальных множествах $S_j = (t_j, t_j + \Delta t_j) \times x_0$, где $S_i + S_j = S$. Таким образом, обсуждаемое ограничение на класс управлений принимает вид:

$$u(t) \in \{ U_{ad} : \begin{cases} u(t) = 0 \text{ на } S_i, \\ u(t) = u_j \text{ на } S_j, \end{cases} \} \quad (4.34)$$

где u_j - набор постоянных управлений, оптимальные значения которых необходимо найти, $j = \{1, \dots, n\}$ - номер участка "включения" управления, n - количество участков "включения" управления.

4. Ограничение на множество допустимых состояний СРП: $u \in V_{ad}$. Здесь нет большого разнообразия типов, видов форм ограничений, как для управления. Это объясняется тем, что различные требования, которым должно удовлетворять состояние СРП, как правило, содержатся в целевом функционале J . Обычно множество допустимых состояний V_{ad} представляет собой множество всех функций-состояний $v(\tau)$, не выходящих за пределы максимального и/или минимального заданного значения на некотором пространственно-временном подмножестве $S'' \subseteq \Sigma$:

$$V_{ad} = \{v: v_{\min} \leq v(\tau) \leq v_{\max}, \tau \in S'' \subseteq \Sigma\}. \quad (4.35)$$

В общем случае множество S'' не совпадает ни с S' - областью определения целевого функционала, ни с S - областью определения управления, ни с Σ - областью функционирования СРП.

Теперь перейдем к обсуждению и разработке алгоритмов реализации приведенных ограничений прямыми экстремальными методами, сохраняя сложившийся порядок следования типов ограничений.

1. Ограничение на множество допустимых управлений (4.32). В этом случае алгоритмы минимизации (4.27) - (4.29) превращаются в методы проекции спуска на допустимое множество:

$$u^{k+1} = P_{U_{ad}} \left\{ u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k \right\} \quad \text{п.в.С.}, \quad (4.36)$$

$$u^{k+1} = P_{U_{ad}} \left\{ u^k - b^k \alpha^k p^k \right\} \quad \text{п.в.С.}, \quad (4.37)$$

где $P_{U_{ad}}$ - оператор проецирования [28] на допустимое множество управлений U_{ad} .

Для допустимого множества (4.32) оператор проецирования работает следующим образом. Для тех пространственно-временных точек, где $u^{k+1}(\tau) < u_{\min}$ принимается $u^{k+1}(\tau) = u_{\min}$ и, соответственно, где $u^{k+1}(\tau) > u_{\max}$ принимается $u^{k+1}(\tau) = u_{\max}$. Если $u^{k+1} \in \text{int} U_{ad}$, т.е. очередное приближение не выходит за границу допустимого множества U_{ad} , то оператор проецирования $P_{U_{ad}} = 1$ и экстремальные алгоритмы (4.27) - (4.29) применяются без каких-либо дополнительных коррекций и адаптаций.

Таким образом, ограничения типа (4.32) в прямом экстремальном подходе реализуются очень просто традиционными методами проекции спуска на допустимое множество.

2. Изопериметрическое условие. Алгоритмы минимизации (4.27) - (4.29) обеспечивают спуск на основе направлений $\alpha^k \nabla J^k$ и $\alpha^k p^k$ в пространстве управлений U . Для минимизации в подпространстве $U_{ad} \subset U$ необходимо использовать новое специфическое направление спуска. Введем в подпространстве U_{ad} некоторое направление минимизации $-d(\tau)$, тогда алгоритмы минимизации будут иметь вид:

$$u^{k+1} = u^k - b^k d^k, \quad \text{п.в.С.} \quad (4.38)$$

При этом НУО в подпространстве U_{ad} примет вид:

$$d^k = 0 \quad \text{п.в.С.} \quad (4.39)$$

Направление d^k должно обладать тем свойством, что, если приближение u^k удовлетворяет изопериметрическому условию (4.33), то и очередное приближение u^{k+1} должно ему удовлетворять. Это означает, что согласно (4.38) необходимо

$$\int_{\Sigma} d^k dS = 0. \quad (4.40)$$

Из выражения (4.40) следует, что направление спуска α^k можно задавать, например, как

$$\alpha^k = \alpha^k \nabla J^k + \alpha_a^k, \quad (4.41)$$

где α_a^k - аддитивная коррекция направления спуска, обеспечивающая преобразование спуска из пространства U в подпространство $U_{ад}$. Очевидно, что аддитивная коррекция может быть константой своей для каждой итерации k , т.е. член $\alpha_a^k \in R$. Рассмотрим процедуру определения необходимых значений аддитивных коррекций α_a^k .

Пусть приближение u^k удовлетворяет изопериметрическому условию (4.33). Сделаем очередной спуск методом (4.27). Мы получим

$$\int_S u^{k+1} dS = K^k,$$

где K^k - значение изопериметрического параметра K на итерации k . При этом, в общем случае, $K^k \neq K$ - значению изопериметрической константы в условии (4.33).

Интегрирование по S на k -той итерации алгоритма (4.27) даст выражение:

$$K^k = K - b^k \int_S \alpha^k \nabla J^k dS, \quad (4.42)$$

или

$$\int_S \left[\alpha^k \nabla J^k + \frac{K^k - K}{b^k \text{val} S} \right] dS = 0, \quad (4.43)$$

где $\text{val} S = \int_S dS$ - величина множества S .

Сравнивая полученное выражение (4.43) с (4.40) и (4.41) следует, что

$$\alpha_a^k = \frac{K^k - K}{b^k \text{val} S}. \quad (4.44)$$

Именно при такой аддитивной коррекции α_a^k алгоритм (4.27) обеспечит спуск на итерации k в допустимом подпространстве $U_{ад}$. Такой спуск будет состоять из двух подитераций: 1-я подитерация - спуск в пространстве U на итерации k по алгоритму (4.27) и определение

значения изопериметрического параметра K^k ; 2-я подитерация - спуск по алгоритму (4.38) в подпространстве U_{ad} на той же итерации k , но в направлении α^k согласно (4.41).

Данный алгоритм минимизации может быть немного упрощен и представлен в виде одной итерации. Действительно, если в метод (4.38) подставить выражение (4.44) аддитивной коррекции, то мы получим следующий алгоритм коррекции управлений в допустимом подпространстве U_{ad} :

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k - \frac{K^k - K}{\text{val } S}, \quad \text{п.в.С.} \quad (4.45)$$

где K^k удовлетворяет условию (4.42).

3. Ограничение на класс функций, где допустимое подпространство U_{ad} кусочно-постоянных управлений удовлетворяет условию (4.34). Подобного рода ограничения могут быть легко реализованы посредством преобразования алгоритмов спуска (4.27)-(4.29) из бесконечномерного пространства $H(S)$ в соответствующее конечномерное пространство.

В рассматриваемом типе ограничений отыскивается набор управлений-чисел u_j , которые можно трактовать как компоненты некоторого вектора управления $u = (u_j) \in E^n$. При этом минимизация в бесконечномерном пространстве $H(S)$ сводится к минимизации в конечномерном пространстве E^n . Компоненты ∇J вектора-градиента ∇J в сопряженном пространстве E_n^* будут вычисляться на основе функции-градиента $\nabla J \in H^*(S)$ по формуле:

$$\nabla_j J = \int \nabla J ds. \quad (4.46)$$

s_j

Процедура получения градиента целевого функционала будет подробно рассмотрена в следующей главе, откуда элементарно получается формула (4.46) преобразования градиента из бесконечномерного сопряженного пространства $H^*(S)$ в конечномерное E_n^* .

Теперь алгоритмы (4.27)-(4.29) должны применяться в конечномерной форме. Например, алгоритм (4.27) примет вид, основанный на форме (4.8'):

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha^k \nabla J^k, \quad (4.47)$$

$$\begin{cases} \text{если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, & b_1 \geq 1; \\ \text{если } J^k \geq J^{k-1}, \text{ тогда повторяется предыдущая} \\ \text{итерация при } b^{k-1} = b_2 b^{k-2} & b_2 < 1/b_1. \end{cases}$$

$b_1: \operatorname{sgn} \nabla_j J^{k+1} \neq \operatorname{sgn} \nabla_j J^k \quad \forall j$ для некоторых итераций
вблизи \hat{y} .

Заметим, что при этом на интервалах времени S_1 управление всегда будет "выключенным", т.е. $u(t)=0, t \in S_1$, если начальное приближение $u^0(t)$ удовлетворяет ограничению (4.34).

4. Ограничение на множество допустимых состояний СРП типа (4.35) традиционно реализуется в виде штрафных функционалов [37], добавляемых к целевым функционалам. Задача штрафных функционалов - возрастать на границе допустимого множества V_{ad} и, тем самым, "отбрасывать" решение назад, во внутрь множества V_{ad} . При этом целевой функционал принимает вид:

$$J = J_0 + \zeta J_F \rightarrow \inf, \quad (4.48)$$

где J_0 - исходный ("старый") целевой функционал, который является критерием качества оптимизации СРП без ограничений на состояние СРП, J_F - штрафной функционал, ζ - весовой коэффициент, определяющий степень влияния штрафного функционала.

Из выражения (4.48) видно, что явная форма ограничения (4.35) на состояние СРП в данном случае исчезает. Минимизация полученного целевого функционала J не требует привлечения новых экстремальных алгоритмов и условий оптимальности по сравнению с теми, которые уже были получены.

Ограничение (4.35) записывают в той или иной приближительной форме в виде функционала:

$$J_F = \int_{s''} I_F ds'', \quad (4.49)$$

где I_F - штрафная функция относительно аргумента u с параметром u_{\min} и/или u_{\max} . Конкретный вид штрафной функции может быть довольно произвольным. Выбор функции I_F - это дело вкуса и

интуиции каждого исследователя.

Различают три типа штрафных функций - внешние, внутренние и смешанные. Первые из них должны возрастать (штрафовать решение) при нарушении ограничения (4.35). Вторые же возрастают при приближении к границе допустимого множества состояний и достигают бесконечно большой величины на границе $\partial V_{ад}$. Смешанные штрафы обеспечивают конечное возрастание функции I_r при приближении и переходе через границу $\partial V_{ад}$.

В настоящей монографии используются внешние и внутренние штрафы в виде параболических и гиперболических штрафных функций I_r различной степени. Конкретные формы штрафных функций приводятся и исследуются в следующих главах.

Таким образом, рассмотренные наиболее типичные четыре ограничения в задачах оптимизации СРП относительно просто учитываются в прямом экстремальном подходе. Ограничения 1-го и 4-го типов реализуются традиционными методами, а ограничения 2, 3 могут реализовываться методами, разработанными в данном параграфе.

5. ГРАДИЕНТ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА. УПРАВЛЯЕМОСТЬ

5.1. Общая идея определения производной Фреше неявно заданного функционала

В данном параграфе мы рассмотрим идею одного из возможных способов определения градиента (производной Фреше) целевого функционала $J(u)$ для задач оптимального управления СРП [96]. Конкретные примеры определения ∇J имеются в следующих параграфах.

В задачах оптимального управления аргумент u присутствует в функционале J всегда неявно. При этом J зависит явно только от состояния СРП $v(\tau)$ на множестве $S' \subseteq \Sigma$. Состояние v на множестве Σ , вместе с начально-краевыми условиями на $\partial\Sigma$, определяется через управление u на $S \subseteq \Sigma$. Поскольку далее придется выделять элементы задачи управления, содержащие состояние v на множествах Σ и $\partial\Sigma$, то будем обозначать через $V(\Sigma, \partial\Sigma)$ пространство состояний v и пространство преобразований v , которые вкладываются в пространство состояний. Будем считать, что состояния СРП корректно определяются через управление $u(\tau) \in U_{ad} \subseteq U(S)$. Пусть пространство состояний V и управлений U — действительные гильбертовы с интегрируемым квадратом, т.е. $V=L_2$, $U=L_2$.

Запишем уравнения СРП в общей символической форме:

$$A(\tau, v, u) = 0 \in V(\Sigma, \partial\Sigma), \quad (5.1)$$

где A обозначает дифференциальные уравнения СРП, определенные на пространственно-временном множестве Σ вместе с начально-краевыми условиями на $\partial\Sigma$. В принятых обозначениях каждое слагаемое в системе (5.1) является элементом из пространства V .

Критерий качества управления запишем в виде:

$$J(u) = \int_a^b I ds', \quad (5.2)$$

где $I(v, u)$ — заданная функция аргументов v и, возможно, u .

Рассматриваемый метод определения градиента ∇J является модернизацией классического метода множителей Лагранжа. Он включает в себя следующие этапы [96].

1. Линеаризация задачи управления в некоторой внутренней точке u допустимого множества U_{ad} . Данная процедура реализуется варьированием целевого функционала J и уравнений СРП. В отличие от принципов классического вариационного исчисления в прямом экстремальном подходе мы не будем варьировать ограничения на управление. Данные ограничения, как было показано в последнем параграфе предыдущей главы, могут реализовываться соответствующими экстремальными алгоритмами. Напомним, что ограничения на состояние СРП при помощи штрафных функционалов сводят исходную задачу оптимизации к той же самой принципиальной постановке (5.1), (5.2).

Вариации управления δu , согласно (5.1), вызывает вариации состояния δv . В результате варьирования (5.1) и (5.2) получаем:

$$\delta A = A'_v \delta v + A'_u \delta u = 0 \in V(\Sigma, \delta \Sigma) \quad (5.3)$$

$$\delta J = (I'_v, \delta v)_{V^*(S')} + (I'_u, \delta u)_{U^*(S')} \in R. \quad (5.4)$$

Здесь вариация состояния δv принадлежит пространству V , а вариация управления δu - пространству U . Заметим, что вариации δu относительно любого управления u из замкнутого допустимого множества U_{ad} принадлежит всему пространству управлений U . Любые ограничения на δu представляют собой ограничения на дифференцируемость функционала $J(u)$. В данном случае такие ограничения отсутствуют. Круглые скобки с индексами $V^*(S')$ и $U^*(S')$ представляют собой скалярные произведения в сопряженных пространствах V^* и U^* на множестве S' . Линейные функционалы $I'_v \in V^*(S')$ и $I'_u \in U^*(S')$ определены на пространствах вариаций состояния $V(S')$ и управления $U(S')$ соответственно.

Первую вариацию δJ в форме (5.4) будем трактовать как сумму значений линейных функционалов I'_v и I'_u на соответствующих элементах δv и δu . Отметим, что форма первой вариации (5.4) зависит от δv и δu не явно, а через уравнение для вариаций (5.3).

Выражения (5.3) и (5.4) принадлежат разным пространствам. Уравнение (5.3) линеаризованной СРП принадлежит функциональному пространству состояний V , а линеаризованный функционал (5.4) - числовому пространству R .

2. Отображение линеаризованных уравнений СРП при помощи соответствующих линейных функционалов $\tilde{f} \in V^*(\Sigma, \partial\Sigma)$ (множители Лагранжа) из пространства V в пространство R . При этом из уравнения (5.3) получаем:

$$(\tilde{f}, \delta A)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} = (\tilde{f}, A'_V \delta v + A'_U \delta u)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} = 0 \in R. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) "разрывает" однозначную связь между вариациями управления и состояния. Теперь для любой вариации δu можно найти вариацию δv только при заданном значении линейного функционала \tilde{f} . Вариации δu и δv стали независимыми.

3. Преобразование отображений вариаций (5.5) уравнений СРП к отображениям вариаций аргументов, т.е. к вариации состояния δv и к вариации управления δu (аналог тождества Лагранжа):

$$(\tilde{f}, \delta A)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} = (A_V^* \tilde{f}, \delta v)_{V^*(\Sigma, \partial\Sigma)} + (A_U^* \tilde{f}, \delta u)_{U^*(S)} = 0 \in R, \quad (5.6)$$

где A_V^* , A_U^* - некоторые сопряженные операторы, определенные в пространствах $V^*(\Sigma, \partial\Sigma)$ и $U^*(S)$ соответственно. Элементы $A_V^* \tilde{f}$ и $A_U^* \tilde{f}$ представляют собой линейные функционалы, определенные на пространствах $V(\Sigma, \partial\Sigma)$ и $U(S)$ вариаций состояния и управления.

Теперь условия (5.4), (5.6) задачи управления (5.1), (5.2) записаны в одинаковой форме, а именно, - в линейных сопряженных пространствах, определенных на пространствах вариаций состояния и управления.

4. Объединение элементов задачи оптимизации в одинаковых пространствах. Поскольку линейным пространствам свойственна аддитивность их элементов, то можно записать:

$$\delta J = \left[A_V^* \tilde{f} + I'_V \right]_{S'} \cdot \delta v + \left[A_U^* \tilde{f} + I'_U \right]_{S'} \cdot \delta u. \quad (5.7)$$

При объединении элементов сопряженных пространств необходимо учитывать на каких вариациях они определены и для каких пространственно-временных множеств. В выражении (5.7) элементы I'_V , I'_U определены только на множестве S' , а добавляются к элементам, определенным на множествах Σ , $\partial\Sigma$ и S . Формальное

Объединение здесь может оказаться недопустимым. Данные вопросы относятся к проблеме управляемости, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

5. Выделение градиента целевого функционала. Первая вариация целевого функционала в форме (5.7), в отличие от (5.4), явно зависит от двух аргументов δu и δu . Принимая во внимание тот факт, что первая вариация — это главная линейная часть приращения функционала, мы получим, что коэффициенты при аргументах δu и δu представляют собой компоненты градиента ∇J , т.е.

$$\delta J = (\nabla_{\Sigma} J, \delta \Sigma)_{\Sigma}^* + (\nabla_U J, \delta u)_{U(S)}, \in R, \quad (5.8)$$

где

$$\nabla J = \{ \nabla_{\Sigma} J, \nabla_U J \} \in V^* \times U^*. \quad (5.9)$$

Выражение градиента (5.9) неудобно для решения задачи оптимизации (5.1), (5.2). Данный градиент, из-за произвольности линейного функционала \tilde{f} , содержит ненулевую компоненту в сопряженном пространстве состояний V^* . На данном этапе преобразований целесообразно устранить неоднозначную связь между вариациями управления δu и состояния δu . Это можно сделать, если задать значение линейного функционала $\tilde{f} = f$ из условия:

$$A_{\Sigma}^* \tilde{f} + I_{\Sigma}' \Big|_{S} = 0 \in V^*(\Sigma, \delta \Sigma). \quad (5.10)$$

Данное условие представляет собой сопряженную задачу. Очевидно, что она всегда линейная и, по-видимому, всегда того же типа, что и исходная задача (5.1).

Теперь первая вариация целевого функционала выражается только через вариацию управления:

$$\delta J = (A_U^* \tilde{f} + I_U' \Big|_{S}, \delta u)_{U(S)} = (\nabla J, \delta u)_{U(S)}, \quad (5.11)$$

откуда следует, что градиент целевого функционала — это

$$\nabla J = A_U^* \tilde{f} + I_U' \Big|_{S} \in U^*(S). \quad (5.12)$$

Значение vJ определяется через решение f сопряженной задачи (5.10). Проблема корректного определения градиента затрагивает задачу управляемости, которую мы далее и рассмотрим.

5.2. Управляемость СРП

Отсутствие единого подхода в теории оптимизации породило большое разнообразие понятий управляемости [1,23,24,44,61,64,79, 119 и др.]. В самом общем понимании – это совокупность условий, определяющих принципиальную возможность управления системой.

На сегодняшний день не выработано единого понятия и подхода к анализу управляемости для произвольных СРП. Преобладают попытки обобщения результатов управляемости, полученных для систем с сосредоточенными параметрами. При этом управляемость трактуется как возможность перевода системы из начального в заданное терминальное состояние при помощи допустимых управлений.

Такое понятие управляемости для широкого круга задач оптимизации СРП оказывается бесполезным, поскольку управляемость по терминальному состоянию не гарантирует управляемости по пространственно локализованным условиям, накладываемым на состояние СРП в целевом функционале J :

$$J(u) = \int_{s'} Ids' \quad (5.13)$$

Традиционные понятия управляемости не связаны с конкретным видом критерия оптимизации, т.е. они не связаны ни с функцией I , ни с пространственно-временным множеством S' .

Наиболее исследованы вопросы управляемости только для линейных СРП [1,119]. Здесь различают точную и приближительную управляемость в зависимости от возможности точно попасть в некоторое состояние СРП или в некоторую ε -окрестность заданного состояния. Исследование линейных СРП посредством представления решения в виде разложений в ряды по собственным функциям (проблема моментов, §4 глава 2) позволяет получать "тонкие" свойства управляемости [1].

Современное состояние теории управляемости СРП имеет следующие недостатки:

- нет общего подхода к проблемам управляемости для произвольных, а не только линейных СРП;

- понятия управляемости систем жестко связаны с предлагаемыми конкретными методами решения задач оптимального управления, например, с методом проблемы моментов. Это означает, что если задача оптимизации решается каким-либо иным (новым) методом, то для ответа на вопрос управляемости необходимо дублировать ее решение соответствующим методом оптимизации на котором основано то или иное понятие управляемости. В частности, возникают существенные неудобства при решении задач оптимизации прямыми экстремальными методами;

- традиционные понятия управляемости не оперируют с произвольными видами подинтегральной функции I критерия оптимизации (5.13). Не обсуждаются вопросы возможной зависимости I не только от состояния системы u , но и от u, \dot{u} . Обычно полагается, что I - это квадратичная функция от u .

- управляемость систем рассматривается относительно их состояния u , заданного в конечный момент времени t_0 , функционирования системы, или на всей пространственно-временной области Σ , или на пространственной границе системы. Короче говоря, имеющиеся результаты управляемости жестко связаны с конкретным пространственно-временным множеством S' . В то же время практические задачи оптимизации могут использовать нетрадиционные множества S' , например, - идентификация границ нефтяного пласта по дискретным наблюдениям за давлением u внутри нефтяного пласта [116]. В этом случае традиционные понятия управляемости оказываются непригодными.

В настоящей работе предлагается новая точка зрения на проблему управляемости СРП. Она основана на теории некорректных задач и связывает управляемость СРП с целевым функционалом J , а не просто с состоянием системы u на заранее заданном пространственно-временном множестве S' .

Задачи оптимального управления являются обратными задачами. В частном случае, когда мы имеем оптимальное состояние системы и ищем соответствующее оптимальное управление (задачи синтеза оптимального управления), мы решаем традиционную задачу об обратном отображении пространства состояний в пространство управ-

лений:

$$V \longrightarrow U, \quad (5.14)$$

Напомним, что исходная прямая задача характеризуется отображением

$$U \longrightarrow V.$$

В общем случае, оптимальное состояние СРП заранее неизвестно. Оно определяется совместно с оптимальным управлением u_* , возможно заданным на некотором ограниченном допустимом множестве U_{ad} . В этом случае обратное отображение (5.14) носит более сложный характер:

$$V \xrightarrow{\inf J} u_* \in U_{ad} \subseteq U, \quad (5.14')$$

т.е. отображение носит условный характер - "при условии $\inf J$ " и возможно при условии $u_* \in U_{ad}$. Условное отображение (5.14') осуществляется из пространства состояний в элемент u_* допустимого множества управлений. Задача (5.14') является нетрадиционной, более сложной обратной задачей по сравнению с задачей (5.14).

Известно [93,94], что обратные задачи некорректны, т.е. не при любых значениях состояния (условиях, накладываемых на состояние) могут корректно отыскиваться управления. Для решения некорректных задач могут использоваться различные регуляризирующие методы [29,94,95,100], в том числе и методы, описанные в предыдущей главе. Методы регуляризации обеспечивают сужение пространства решений U до компактного множества \mathcal{U} , где может быть найдено единственное и устойчивое решение. В нашем случае, для управляемости СРП, необходимо, чтобы пересечение множеств \mathcal{U} и U_{ad} было не пустым, т.е. $\mathcal{U} \cap U_{ad} \neq \emptyset$.

В связи с этим в работе [97] предлагается трактовка управляемости (применительно к задачам идентификации) как корректности по А.Н.Тихонову обратной задачи условного отображения. Такое отождествление управляемости с указанной корректностью позволяет унифицировать схему выявления условий гарантирующих, либо напротив, указывающих на принципиальную невозможность определения оптимального управления той или иной СРП по заданному целевому функционалу. Подытожим сказанное следующим определением и леммой.

Определение 5.1. Под управляемостью системы следует понимать корректность по А.Н. Тихонову условного обратного отображения (5.14'):

$$V \xrightarrow{\inf J} u_* \in U_{\text{ад}} \subseteq U.$$

Лемма 5.1. СРП управляема относительно целевого функционала J , если обратная задача об отображении элементов пространства состояний СРП V в элемент допустимого множества управлений $U_{\text{ад}}$ при условии $J \rightarrow \inf J$, является корректной в смысле А.Н.Тихонова, т.е. СРП управляема если $\psi \cup U_{\text{ад}} \neq \emptyset$.

Данная Лемма позволяет исследовать проблемы управляемости для произвольных СРП относительно любых целевых функционалов J . Лемма 5.1 довольно просто реализуется методами оптимизации, обладающими регуляризирующими свойствами. В рассматриваемом прямом экстремальном подходе проблема управляемости сводится к анализу на классическую корректность линейной сопряженной задачи.

Напомним, что прямой экстремальный подход состоит из двух, практически самостоятельных, подзадач. Первая - это определение градиента целевого функционала, вторая - минимизация целевого функционала на основе полученного градиента. При этом проблема управляемости также разбивается на две подзадачи:

1. контроль корректности определения градиента ∇J ;
2. регуляризация в алгоритмах минимизации.

Последнее требование в рассматриваемом подходе гарантируется его экстремальными алгоритмами типа (4.27) - (4.29). Доказательство регуляризирующих свойств таких алгоритмов имеется в §1 главы 4.

Для контроля корректности определения ∇J необходимо обратиться к схемам (5.10), (5.12):

$$A_V^* J + I_V' \Big|_s = 0 \in V^*(\Sigma, \partial \Sigma), \quad (5.15)$$

$$\nabla J = A_U^* J + I_U' \Big|_s \in U^*(S). \quad (5.16)$$

Мы видим, что корректность определения ∇J зависит от классической корректности задачи (5.15) в сопряженном пространстве V^* . Отметим, что данная задача, определяемая оператором A_V^* , является прямой и

линейной. Ее нетривиальное решение J (ненулевое решение для произвольного управления u) зависит от свободного члена $I'_v|_{S'}$, т.е. от вида функции I и множества S' . Аналогично член $I'_u|_S$ влияет на корректность операции сложения в сопряженном пространстве управлений U^* . Очевидно, что если $I'_v|_{S'} = 0$ для всех $u \in U_{ad}$, то СРП никогда неуправляема по такому целевому функционалу J .

Итак, если сопряженные операторы $A_v^* \in V^*$ и $A_u^* \in V^*$ существуют и для поиска оптимального управления используются регуляризирующие алгоритмы, то проблема управляемости сводится к анализу зависимости функции I целевого функционала J от своих аргументов u , v , а также - к анализу пространственно-временного множества S' . Такой анализ должен ответить на следующие три вопроса:

- существование классически корректного решения прямой линейной сопряженной СРП (5.15);
- существование нетривиального решения СРП (5.15) на множестве S ;
- корректность добавления слагаемого $I'_u|_S$ в формуле (5.16).

Очевидно, что такой анализ будет аналогичен и не сложнее анализа на классическую корректность сходной СРП.

Таким образом, разработанный прямой экстремальный подход обладает относительно простой процедурой контроля управляемости СРП по заданному целевому функционалу. Новое понятие управляемости делает эту процедуру наглядной и универсальной.

5.3. Градиент в простейшей задаче оптимального управления тепловыми процессами

В качестве примера, иллюстрирующего описанный выше алгоритм определения градиента целевого функционала и анализа управляемости, рассмотрим задачу управления потоком тепла в простейшем химическом реакторе, подробно описанную в начале первой главы. Напомним кратко ее формулировку.

Химическая реакция протекает с поглощением тепла $q(t)$. Целью управления является удержание реакции в заданном температурном режиме $T_*(t)$. Значения q и T_* задаются на внутренней поверхности

стенки реактора, а управление вводом тепла осуществляется на ее наружной поверхности (см. рис. 1.1). При этом процесс теплопередачи описывается одномерной нестационарной линейной параболической СРП:

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad t, x \in \Sigma = [t_a, t_b] \times [x_0, x_1], \quad (5.17)$$

где $T \in V = L_2(\Sigma)$ - температура стенки реактора, C , ρ и λ - теплоемкость, плотность и теплопроводность соответственно.

Граничные условия:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial t} = q, \quad t, x \in S' = (t_a, t_b) \times x_0; \quad (5.18)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial t} = u, \quad t, x \in S = (t_a, t_b) \times x_1. \quad (5.19)$$

Начальное условие:

$$T = T_a, \quad t, x \in S_a = t_a \times [x_0, x_1]. \quad (5.20)$$

Степень отклонения температуры $T(t, x_0)$ реакции от заданной температуры T_* будем оценивать функционалом [99]:

$$J(u) = \int_{s'} (T - T_*)^2 dt, \quad (5.21)$$

или

$$J(u) = \int_{s'} |T - T_*| dt. \quad (5.22)$$

Задача оптимального управления реактором формулируется следующим образом. Необходимо найти поток тепла $u(t) \in U = L_2(S)$, доставляющий минимум функционалу (5.21) или (5.22).

Функционал (5.21) дифференцируем. При отсутствии ограничений типа (1.7) на управление он имеет стационарную оптимальную точку u_* . Если имеются ограничения (1.7) и оно активно, то оптимальное управление будет краевой точкой допустимого множества U_{ad} . Второй целевой функционал (5.22) не дифференцируем ни по Фреше, ни по Гато. Он имеет строго сингулярную оптимальную точку. Перейдем к определению градиента ∇J .

СРП (5.17), линеаризованная относительно $\delta T \in V(\Sigma)$, имеет вид:

$$e = C\rho \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} = 0 \in V(\Sigma). \quad (5.23)$$

Граничные и начальные условия принимают вид:

$$\lambda \frac{\partial \delta T}{\partial t} = 0 \text{ на } S', \quad \lambda \frac{\partial \delta T}{\partial t} = \delta u \text{ на } S, \quad (5.24)$$

$$\delta T = 0 \text{ на } S_0. \quad (5.25)$$

Линеаризованные функционалы (5.21), (5.22) принимают вид соответственно:

$$\delta J = \int_{\Sigma} 2(T - T_*) \delta T dt = \left[2(T - T_*), \delta T \right]_{V^*(\Sigma)}, \in R, \quad (5.26)$$

$$\delta J = \int_{\Sigma} \text{sgn}(T - T_*) \delta T dt = \left[\text{sgn}(T - T_*), \delta T \right]_{V^*(\Sigma)}, \in R. \quad (5.27)$$

Для отображения линеаризованной СРП (5.23) в пространство R введем линейный функционал $f \in V^*(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на уравнение (5.23):

$$(f, e)_{V^*(\Sigma)} = \int_{\Sigma} f e dt dx = 0 \in R. \quad (5.28)$$

Преобразуем данное выражение к виду скалярного произведения относительно вариации δT . Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$f C\rho \frac{\partial \delta T}{\partial t} = \frac{\partial C\rho f \delta T}{\partial t} - C\rho \frac{\partial f}{\partial t} \delta T;$$

$$f \lambda \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[f \lambda \frac{\partial \delta T}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \delta T \right] + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta T.$$

Полученные дополнительные слагаемые в виде производных легко интегрируются по x и по t в выражении (5.28). Окончательно, с учетом (5.24) и (5.25), получаем:

$$(f, e)_{V^*(\Sigma)} = \int_{\Sigma} \left[-C\rho \frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \delta T dt dx + \int_{\Sigma} \left[-\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta T dt +$$

$$+ \int_s \left[-\lambda \frac{\partial f}{\partial T} (T - f \delta u) \right] dt + \int_{s_0} c_p \delta T dx. \quad (5.29)$$

Теперь можно объединить выражение (5.29) с линеаризованным функционалом (5.26) или (5.27). Для того, чтобы избавиться от компоненты градиента ∇J , принадлежащей сопряженному пространству состояний V^* , потребуем:

$$c_p \frac{\partial f}{\partial T} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \in V^*(\Sigma). \quad (5.30)$$

В конечный момент времени и на обеих границах потребуем:

$$f = 0 \text{ на } S_0; \quad (5.31)$$

$$-\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + 2(T - T_*) = 0 \quad \text{или} \quad -\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \text{sgn}(T - T_*) = 0 \text{ на } S'; \quad (5.32)$$

$$-\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ на } S. \quad (5.33)$$

При этом вариация целевого функционала принимает вид:

$$\delta J = - \int_s f \delta u dt = (\nabla J, \delta u)_{U^*(S)},$$

где градиент

$$\nabla J = -f \in U^*(S). \quad (5.34)$$

Обсудим проблемы управляемости. Сопряженная СРП (5.30) - (5.33) решается в обратном по времени направлении с нулевым начальным условием (5.31). Тип уравнения (5.30), аналогично уравнению (5.15), - параболический (с учетом обратного времени). Подобные линейные уравнения имеют классически корректные решения [18, 42]. Источник нетривиального решения f сопряженной СРП, в соответствии с (5.32), находится на левой границе S' . Поскольку СРП (5.30) параболическая, то ее нетривиальное решение распространяется мгновенно с левой границы S' на правую границу S . Следовательно, для функционала заданного на множестве S' корректно

определяется градиент ∇J через нетривиальное решение сопряженной задачи на множестве S .

Регуляризацию решения (поиск оптимального управления u в компакте корректности Ψ) далее будем осуществлять на основе градиента ∇J или сопряженных градиентов p экстремальными алгоритмами (4.27), (4.28), описанными в предыдущей главе.

Таким образом, СРП (5.17) - (5.19) управляема на S относительно целевых функционалов (5.21) и (5.22).

5.4. Градиент в задаче идентификации параметров открытых русел

Найдем градиент целевого функционала в задаче идентификации распределенного коэффициента шероховатости открытого русла. Подробная постановка данной задачи имеется в первой главе. Кратко ее напомним.

Течение воды в открытых руслах описывается нестационарной квазилинейной гиперболической системой Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + 2w \frac{\partial Q}{\partial x} + B(c^2 - w^2) \frac{\partial Z}{\partial x} + F_{tr} - gwt = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{B} q = 0, \quad t, x \in \Sigma = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Состоянием СРП (5.35) является вектор-функция $v(t, x) \in V = L_2^2(\Sigma)$ с компонентами $v_1 = Q$ - расход воды и $v_2 = Z$ - уровень воды (см. рис. 1.2). Система (5.35) в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + d = 0, \quad (5.35')$$

где вектор $v = \begin{bmatrix} Q \\ Z \end{bmatrix}$, матрица $A = \begin{bmatrix} 2w & B(c^2 - w^2) \\ 1/B & 0 \end{bmatrix}$, вектор $d = \begin{bmatrix} F_{tr} - gwt \\ -q/B \end{bmatrix}$.

Член трения

$$F_{tr} = \frac{8Q|Q|}{\omega R C^2}, \quad C = \frac{1}{u} R^{2/3} = u^{1/2} - 0.15 - 0.75R^{1/2} (u^{1/2} - 0.1),$$

где $u(x)$ - искомый коэффициент шероховатости.

Область определения $u(x)$ следует считать все множество $S = \Sigma$.

т.е. $u=u(t,x)$ при условии, что u является постоянной функцией относительно t . При этом мы можем находить коэффициент шероховатости $u(x)$ в любой момент времени или интегрально по времени [97].

Система (5.35) имеет граничные и начальные условия:

$$Z=Z_0, \quad t, x \in S_0 = (t_a, t_b) \times x_0; \quad (5.36)$$

$$Q=Q_1, \quad t, x \in S' = (t_a, t_b) \times x_1; \quad (5.37)$$

$$Z=Z_a, \quad Q=Q_a, \quad t, x \in S_a = t_a \times [x_0, x_1]. \quad (5.38)$$

Целевой функционал будем задавать в виде:

$$J(u) = \int_S (Z - Z_0)^2 dt, \quad (5.39)$$

или

$$J(u) = \int_S |Z - Z_0| dt, \quad (5.40)$$

где Z_0 - экспериментально наблюдаемый уровень воды на правой границе S' русла.

Функционал (5.39) дифференцируем, он имеет стационарную оптимальную точку u_* . Функционал (5.40) недифференцируем ни по Фреше, ни по Гато. Он имеет строго сингулярную оптимальную точку.

Задача идентификации формулируется следующим образом. Необходимо найти управление $u \in L_2(S)$ СРП (5.35) - (5.37), доставляющее минимум функционалу (5.39) или (5.40). Перейдем к определению градиента ∇J .

Система (5.35), линеаризованная относительно $\delta u = \begin{bmatrix} Q \\ Z \end{bmatrix} \in V(\Sigma)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} e_1 = & \frac{\partial \partial Q}{\partial t} + \frac{\partial 2w}{\partial Q} \delta Q + 2w \frac{\partial \partial Q}{\partial x} + \frac{\partial B(c^2 - w^2)}{\partial Q} \frac{\partial Z}{\partial x} \delta Q + \frac{\partial Fr}{\partial Q} \delta Q + \\ & + \frac{\partial 2w}{\partial Z} \frac{\partial Q}{\partial x} \delta Z + \frac{\partial B(c^2 - w^2)}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial x} \delta Z + B(c^2 - w^2) \frac{\partial \delta Z}{\partial x} + \frac{\partial Fr}{\partial Z} \delta Z - gB \delta Z + \\ & + \frac{\partial Fr}{\partial u} \delta u = 0, \\ e_2 = & \frac{\partial \delta Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial \partial Q}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Граничные условия принимают вид:

$$\delta Z=0 \text{ на } S_0, \quad \delta Q=0 \text{ на } S'. \quad (5.42)$$

На линии начальных условий имеем:

$$\delta Z=\delta Q=0 \text{ на } S_0. \quad (5.43)$$

Линеаризованный функционал (5.39) принимает вид:

$$\delta J = \int_S 2(Z-Z_0) \delta Z dt = \left\{ 0, 2(Z-Z_0) \right\}_{V^*(S')} \delta v, \in R, \quad (5.44)$$

а функционал (5.40) -

$$\delta J = \int_S \text{sgn}(Z-Z_0) \delta Z dt = \left\{ 0, \text{sgn}(Z-Z_0) \right\}_{V^*(S')} \delta v, \in R, \quad (5.45)$$

где фигурные скобки означают вектор-строку. Скалярное произведение двумерных вектор-функций из L_2^2 , в частности, - в сопряженном пространстве $V^*(S')$, определяется выражением:

$$(a, b)_{V^*(S')} = \int_{S'} (a_1 b_1 + a_2 b_2) dS'.$$

Для отображения линеаризованной СРП (5.41) в пространство R введем линейный функционал $f = (f_1, f_2) \in V^*(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на вектор $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$:

$$(f, e)_{V^*(\Sigma)} = \int_{\Sigma} (f_1 e_1 + f_2 e_2) dt dx = 0 \in R. \quad (5.46)$$

Преобразуем выражение (5.46) к виду скалярного произведения относительно вариаций аргументов δQ и δZ . Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$f_1 \frac{\partial \delta Q}{\partial t} = \frac{\partial f_1 \delta Q}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \delta Q;$$

$$f_2 2w \frac{\partial \delta Q}{\partial x} = \frac{\partial f_2 2w \delta Q}{\partial x} - 2w \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta Q - f_2 \frac{\partial 2w}{\partial x} \delta Q;$$

$$f_1 B(c^2 - w^2) \frac{\partial \delta Z}{\partial x} = \frac{\partial f_1 B(c^2 - w^2) \delta Z}{\partial x} - B(c^2 - w^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta Z - f_1 \frac{\partial B(c^2 - w^2)}{\partial x} \delta Z;$$

$$f_2 \frac{\partial \delta Z}{\partial t} = \frac{\partial f_2 \delta Z}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial t} \delta Z;$$

$$f_2 \frac{1}{B} \frac{\partial \delta Q}{\partial x} = \frac{\partial f_2 / B \delta Q}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta Q.$$

Слагаемые, содержащие производные без коэффициентов, легко интегрируются по x или по t в выражении (5.46). Окончательно, с учетом (5.42), (5.43), получаем:

$$\begin{aligned} (f, \theta)_{V^*(\Sigma)} = & \int_{\Sigma} \left[-\frac{\partial f_1}{\partial t} - 2w \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \left[\frac{2w}{\omega} (B-1) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Q} \right] \right] \delta Q dt dx + \\ & + \int_{\Sigma} \left[-\frac{\partial f_2}{\partial t} - B(c^2 - w^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \left[\frac{2w}{\omega} (1-B) \frac{\partial Q}{\partial x} - gBt + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Z} \right] \right] \delta Z dt dx + \\ & + \int_{\Sigma} f_1 \frac{\partial F_{1r}}{\partial \omega} \delta \omega dt dx + \int_{S_0} \left[-2w f_1 - f_2 / B \right] \delta Q dt + \int_{S'} \left[B(c^2 - w^2) f_1 \right] \delta Z dt + \\ & + \int_{S_b} \left[f_1 \delta Q + f_2 \delta Z \right] dx = 0 \in R. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Теперь можно объединить выражение (5.47) с линеаризованным функционалом (5.39) или (5.40). Для того, чтобы избавиться от компонент градиента в пространствах $V^*(\Sigma)$, $V^*(S_0)$, $V^*(S_b)$ потребуем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + 2w \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial f_1}{\partial x} - f_1 \left[\frac{2w}{\omega} (B-1) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Q} \right] = 0, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - B(c^2 - w^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \left[\frac{2w}{\omega} (1-B) \frac{\partial Q}{\partial x} - gBt + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Z} \right] = 0.$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^r \frac{\partial f}{\partial x^r} + Df^r = 0, \quad (5.48')$$

где матрица $D = \begin{pmatrix} \frac{2w}{\omega}(B-1)\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Q} & 0 \\ \frac{2w}{\omega}(1-B)\frac{\partial Q}{\partial X} - gBt + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Z} & 0 \end{pmatrix}$, а линейный функци-

онал f^r - вектор-столбец.

В конечный момент времени и на левой границе русла потребуем:

$$f_1 = f_2 = 0 \text{ на } S_b; \quad (5.49)$$

$$2wf_1 + f_2/B = 0 \text{ на } S_o. \quad (5.50)$$

На правой границе после объединения с δJ (5.44) получаем:

$$B(c^2 - w^2)f_1 + 2(Z - Z_o) = 0. \quad (5.51)$$

После объединения с δJ (5.45) получаем:

$$B(c^2 - w^2)f_1 + \text{sgn}(Z - Z_o) = 0. \quad (5.52)$$

Вариация целевого функционала принимает вид:

$$\delta J = \int_{\Sigma} f_{1,u} \frac{\partial F_{1r}}{\partial u} \delta u dt dx = (\nabla J, \delta u)_{U^*(S)},$$

откуда следует, что градиент - это

$$\nabla J = \int_{t_a}^{t_b} f_{1,u} \frac{\partial F_{1r}}{\partial u} \left[2 - \sqrt{u} \left[2.5 - 0.75\sqrt{R} \right] \ln R \right] dt \in U^*(S). \quad (5.53)$$

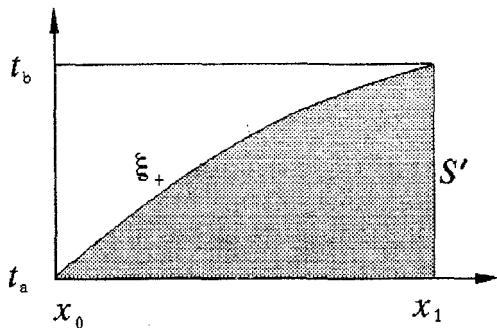
Из системы (5.48') видно, что сопряженная СРП является линейной гиперболической системой с теми же характеристиками $\xi_{\pm} = \frac{dx}{dt} = c \pm w$, что и исходная СРП (5.35'), поскольку оба собственные числа $\xi_{1,2} \equiv \xi_{\pm}$ действительной матрицы A и транспонированной матрицы A^T всегда одинаковы. Данное обстоятельство существенно облегчает процедуру анализа управляемости и построения конечноразностных алгоритмов для решения сопряженной СРП [10].

Сопряженная СРП (5.48) - (5.51) решается в обратном по времени направлении с нулевым начальным условием (5.49). Источник возмущений (нетривиальное решение f), в соответствии с (5.51),

(5.52), находится на правой границе S' (см. рис. 5.1).

Система (5.35) допускает разрывные решения (ударные волны). В смысле обобщенных функций СРП (5.35) имеет корректное решение [80]. Очевидно, что линейная СРП (5.48) корректна в том же смысле. Согласно (5.51), (5.52) линейный функционал f имеет разрыв в угловой точке $t_b \times x_1$. Разрыв распространяется вдоль характеристики $\xi_+ = \frac{dx}{dt} = c+w$ через всю область Σ . По этой причине для решения исходной и сопряженной СРП целесообразно применять одни и те же методы сквозного счета.

Рис. 5.1. Область влияния распределенного коэффициента шероховатости на целевой функционал, заданный в конечном створе канала



Нетривиальное решение сопряженной задачи на всей длине (x_0, x_1) русла зависит от размеров множества $S' = (t_a, t_b) \times x_1$. Минимально необходимое время для идентификации распределенного коэффициента шероховатости определяется временем распространения нетривиального значения линейного функционала f от правой до левой границы русла (см. рис. 5.1). Таким образом, необходимо

$$t_b > \int_{x_0, t_a}^{x_1} (\xi_+)^{-1} dx.$$

При таком множестве S' градиент (5.53) определяется корректно по всей длине русла вблизи линии начальных условий [97], т.е. СРП (5.35) - (5.37) управляема на множестве $S = t_{a..b} \times (x_0, x_1)$ относительно коэффициента шероховатости $u(x)$ по целевому функционалу (5.39) и (5.40). Наличие интегрирования по времени в формуле (5.53) не принципиально для вопроса управляемости рассматриваемой СРП.

5.5. Градиент в задаче оптимального управления работой насосной станции на канале

Задачи оптимизации работы гидротехнических сооружений подробно рассматривались в первой главе. Из всего многообразия задач управления, возникающих в водохозяйственных комплексах, можно выделить важнейшую – управление насосными станциями. Здесь функцией управления $u(t)$ является расход воды, в частности, расход $Q(t, x_0)$ на левой границе x_0 канала (см. рис. 1.4), т.е. управление содержится в граничном условии уравнений Сен-Венана:

$$Q=ueJ(S), \quad S=(t_a, t_b) \times x_0 \quad (5.54)$$

– для левой границы русла. На правой границе имеем:

$$Q=Q_1, \quad t, x \in S'=(t_a, t_b) \times x_1. \quad (5.55)$$

где $Q_1(t)$ – расход воды, задаваемый работой потребителя.

Состояние потока в течение всего времени управления работой канала определяется уравнениями Сен-Венана (5.35) с граничными условиями (5.54), (5.55) при заданном начальном состоянии потока:

$$Z=Z_a, \quad Q=Q_a, \quad t, x \in S_a=t_a \times [x_0, x_1]. \quad (5.56)$$

Целью управления является удержание уровня воды в нижнем створе канала, как можно ближе к номинальному значению Z_n при произвольном режиме работы потребителя Q_1 , т.е. необходимо минимизировать функционал:

$$J(u)=\int_{s'} (Z-Z_n)^2 dt. \quad (5.57)$$

Целевой функционал (5.57) может минимизироваться при ограничении на допустимое множество управлений типа (1.15), при интегральном изопериметрическом условии (1.16), при ограничении на класс функций (1.17) и при ограничении на состояние потока (1.18).

Напомним, что в прямом экстремальном подходе при получении градиента нет необходимости варьировать ограничения на допустимое множество управлений типа (1.15) и интегральное условие (1.16).

Данные ограничения учитываются соответствующими экстремальными алгоритмами, подробно описанными в последнем параграфе предыдущей главы.

Ограничения на класс функций (1.17) и на состояние потока (1.18) необходимо учитывать при получении градиента ∇J . Поэтому выпишем здесь данные ограничения.

Условия включения насосных агрегатов могут требовать искать оптимальные режимы работы насосной станции в классе кусочно-постоянных функций с заданными моментами времени возможных переключений:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{на } S_i, \\ u_j & \text{на } S_j, \end{cases} \quad (5.58)$$

где $S_i = (t_i, t_i + \Delta t_i) \times x_0$ - множество закрепленных нулевых значений управления $u(t)$, $S_j = (t_j, t_j + \Delta t_j) \times x_0$ - множество незакрепленных постоянных значений управления $u(t)$, $S_i + S_j = S$, u_j - набор постоянных управлений, оптимальные значения которых необходимо найти, $j=1, \dots, n$.

Учет ограничения (5.58), согласно исследованиям предыдущей главы, заключается в преобразовании градиента ∇J из бесконечномерного сопряженного пространства управлений в конечномерное пространство по формуле:

$$\nabla_j J = \int_{S_j} \nabla J ds. \quad (5.59)$$

Ограничение (5.58) сводится к требованию минимизации в конечномерном пространстве, т.е. $u \in E^n$.

Ограничение (1.18) на состояние потока

$$Z(t, x) \leq Z_{\max}(x) \text{ на } \Sigma \quad (5.60)$$

будем учитывать штрафным функционалом

$$J_F = \int_{\Sigma} I_F dt. \quad (5.61)$$

В этом случае ограничения на управление $u(t)$ отсутствуют, т.е. $U=L_2(S)$.

Для внешнего штрафа исследовались две штрафные функции:

$$I_F = (Z/Z_{\max})^{\alpha} - 1 \quad (5.62)$$

и

$$I_F = (Z - Z_{\max})^{\alpha} \quad (5.63)$$

при $Z > Z_{\max}$, иначе $I_F = 0$. Для внутреннего штрафа -

$$I_F = (Z - Z_{\max})^{-\alpha}. \quad (5.64)$$

Здесь $\alpha \geq 1$ - экспериментально подбираемый показатель степени штрафных функций. Заметим, что функции (5.62) - (5.64) могут быть записаны и относительно глубины потока H , поскольку $Z(t,x) = Z_0(x) + H(t,x)$, где Z_0 - уровень линии дна канала.

Теперь можно перейти непосредственно к процедуре получения градиента целевого функционала (5.57). Поскольку СРП в данной задаче управления такая же, как и в предыдущей задаче идентификации, то, для того, чтобы не дублировать многочисленные одинаковые выкладки, мы будем ссылаться на уже имеющиеся результаты предыдущего параграфа.

Система Сен-Венана (5.35), линеаризованная относительно $\delta u(t,x) \in \bar{V} = L_2^2(\Sigma)$, имеет вид типа (5.41) с той лишь разницей, что здесь на Σ вариация δu отсутствует. Линеаризованные граничные условия (5.54), (5.55) принимают вид:

$$\delta Q = \delta u \text{ на } S, \quad \delta Q = 0 \text{ на } S'. \quad (5.65)$$

На линии начальных условий имеем:

$$\delta Z = \delta Q = 0 \text{ на } S_a. \quad (5.66)$$

Линеаризованный функционал (5.57) принимает вид:

$$\delta J = \int_{S'} (Z - Z_n) \delta Z dt = \left\{ (0, 2(Z - Z_n)) \right\}_{V^*} \delta u \Big|_{S'} \in R, \quad (5.67)$$

где фигурные скобки означают вектор-строку. Скалярное произведение двумерных вектор-функций описано в предыдущем параграфе.

Для отображения линеаризованной СРП в пространство R вводится линейный функционал $f = \{f_1, f_2\} \in V^*(\Sigma)$. С учетом граничных (5.65) и начальных (5.66) условий, аналогично преобразованиям предыдущего параграфа, мы получаем:

$$\begin{aligned}
 (f, \theta)_{V^*(\Sigma)} = & \int_{\Sigma} \left[-\frac{\partial f_1}{\partial t} - 2w \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1 \left(\frac{2w}{\omega} (B-1) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Q} \right) \right] \delta Q dt dx + \\
 & + \int_{\Sigma} \left[-\frac{\partial f_2}{\partial t} - B(c^2 - w^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \left(\frac{2w}{\omega} (1-B) \frac{\partial Q}{\partial x} - gBt + \frac{\partial F_{1r}}{\partial Z} \right) \right] \delta Z dt dx - \\
 & - \int_{S_1} f_2 / B \delta u dt - \int_{S_2} 2w f_1 \delta Q dt + \int_{S'} [B(c^2 - w^2) f_1] \delta Z dt + \\
 & + \int_{S_b} [f_1 \delta Q + f_2 \delta Z] dx = 0 \in R. \tag{5.68}
 \end{aligned}$$

Теперь можно объединить выражение (5.68) с линеаризованным функционалом (5.67). Для того, чтобы избавиться от компонент градиента в пространствах $V^*(\Sigma)$, $V^*(S)$, $V^*(S_b)$ необходимо использовать сопряженную задачу (5.48), которая в векторной форме имеет вид (5.48')

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^T \frac{\partial f}{\partial x} + Df^r = 0.$$

В конечный момент времени и на левой границе русла будем иметь:

$$f_1 = f_2 = 0 \text{ на } S_b, \tag{5.69}$$

$$f_1 = 0 \text{ на } S. \tag{5.70}$$

На правой границе после объединения с δJ (5.67), получаем:

$$B(c^2 - w^2) f_1 + 2(Z - Z_n) = 0. \tag{5.71}$$

Вариация целевого функционала принимает вид:

$$\delta J = - \int_S f_2 / B \delta u dt = (\nabla J, \delta u)_{U^*(S)}, \quad (5.72)$$

откуда следует, что градиент целевого функционала J - это

$$\nabla J = - f_2 / B \in U^*(S). \quad (5.73)$$

Теперь перейдем к процедуре учета ограничений (5.58), (5.60).

Из выражения первой вариации целевого функционала (5.72) видно, что, если управление будет кусочно-постоянным, согласно выражению (5.58), то δJ примет вид:

$$\delta J = - \sum_{j=1}^n \int_{S_j} f_2 / B dt \cdot \delta u_j = (\nabla J, \delta u)_{E_n}, \quad (5.72)$$

откуда следует, что градиент целевого функционала (5.57) при наличии ограничения (5.58) - это вектор из сопряженного пространства E_n с компонентами

$$\nabla_j J = - \int_{S_j} f_2 / B dt, \quad (5.73)$$

что соответствует формуле (5.59) и (4.46) преобразования градиента из бесконечномерного пространства $U^* = L_2(S)$ в конечномерное E_n .

Теперь найдем условия для определения градиента функционала (5.57) при ограничениях на состояние потока.

Вариация штрафного функционала (5.61) принимает вид:

$$\delta J_F = \int_{\Sigma} I_F' \delta Z dt = \left\{ (0, \partial I_F' / \partial Z), \delta v \right\}_{V^*(\Sigma)} \in R, \quad (5.74)$$

где для внешних штрафов (5.62), (5.63) производные от штрафных функций равны соответственно:

$$I_F' = \frac{\alpha}{Z_{\max}} \left(\frac{Z}{Z_{\max}} \right)^{\alpha-1}, \quad (5.75)$$

$$I'_F = \alpha [Z - Z_{\max}]^{\alpha-1} \quad (5.76)$$

при $Z > Z_{\max}$, иначе $I'_F = 0$. Для внутреннего штрафа (5.64) -

$$I'_F = -\alpha (Z - Z_{\max})^{-\alpha-1}. \quad (5.77)$$

Добавление линеаризованного штрафного функционала к выражению (5.68) на Σ приведет к изменению сопряженной задачи. Появится свободный член в СРП (5.48) и она примет вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + 2w \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial f_2}{\partial x} - f_1 \left[\frac{2w}{\omega} (B-1) \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial F_{tr}}{\partial Q} \right] = 0, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - B(c^2 - w^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 \left[\frac{2w}{\omega} (1-B) \frac{\partial Q}{\partial x} - gBt + \frac{\partial F_{tr}}{\partial Z} \right] - \zeta I'_F = 0,$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^T \frac{\partial f}{\partial x} + Df^x - \zeta I'_F = 0, \quad (5.78')$$

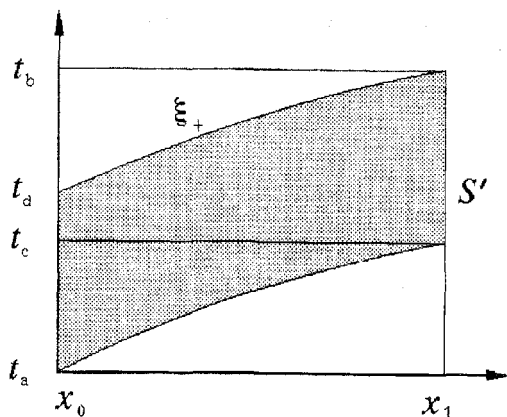
где вектор-столбец $I'_F = \begin{bmatrix} 0 \\ I'_F \end{bmatrix}$. Здесь ζ , согласно (4.48), - экспериментально подбираемый весовой коэффициент.

Таким образом, при ограничении на состояние потока, градиент (5.73) будет определяться через решение сопряженной задачи (5.78), (5.69) - (5.71).

Остается обсудить проблемы управляемости, т.е. выяснить условия классической корректности решения сопряженной СРП и выявить область существования нетривиального решения для определения градиента ∇J . Регуляризация решения обратной задачи оптимального управления работой насосной станции в дальнейшем будет обеспечиваться соответствующими экстремальными алгоритмами с использованием ∇J . Данные алгоритмы подробно описаны в главе 4.

На рис. 5.2 приведена xt -диаграмма области функционирования рассматриваемой СРП. Сопряженная задача решается в обратном по времени направлении с нулевым начальным условием (5.69) в момент времени t_b . Классическая корректность прямого решения такой задачи обсуждена в предыдущем параграфе.

Рис. 5.2. Область влияния насосной станции в начальном створе канала на целевой функционал, заданный в конечном створе канала



При отсутствии штрафных функционалов источник возмущений (нетривиальное решение), в соответствии с (5.71), находится на правой границе канала в области S' . Возмущения распространяются вдоль характеристик $\xi_+ = \frac{dx}{dt} = c+w$ через всю область Σ . Область влияния целевого функционала (5.57) на значение градиента ∇J представляет собой серую полосу на рис. 5.2. Нетривиальное значение линейного функционала J , определяемое целевым функционалом на правой границе x_1 , распространяется на левую границу x_0 , где, согласно (5.73), вычисляется значение градиента ∇J .

Очевидно, что нетривиальное решение сопряженной задачи на левой границе канала существует не на всем множестве S . Нетривиальное решение может быть найдено на некотором подмножестве $S \subset S$ только при достаточно большом времени управления t_b . Из рис. 5.2 видно, что необходимо

$$t_b > t_c, \quad (5.79)$$

где

$$t_c = \int_{x_0, t_a}^{x_1} (\xi_+)^{-1} dx \quad (5.80)$$

- время распространения возмущений от насосной станции до потребителя с момента включения станции.

Время окончания влияния работы насосной станции на состояние потока в нижнем створе потребителя для рассматриваемого интервала времени (t_a, t_b) согласно рис. 5.2 – это

$$t_d = t_b + \int_{x_1, t_b}^{x_0} (t_*)^{-1} dz \quad (5.81)$$

Легко предсказать, что, чем сильнее будет отличаться расход воды Q_1 потребителя от начального расхода Q_0 в канале, тем резче и интенсивнее будет вынуждена работать насосная станция в начальные моменты времени, поскольку на интервале времени (t_a, t_c) работа потребителя неуправляема, некомпенсируема работой насосной станции. Большие пиковые нагрузки на насосную станцию в начальные моменты времени не всегда возможны и допустимы. Именно поэтому подобные задачи управления необходимо решать с ограничениями на управление и/или на состояние потока.

Ограничение на состояние потока потребовало введения штрафного функционала (5.61). Данный функционал создает возмущения в решении сопряженной задачи $f(t, x)$ во всей прямоугольной области $\Sigma = (t_a, t_b) \times (x_0, x_1)$. Поэтому он будет влиять на значение градиента ∇J не только в моменты времени (t_a, t_d) , но и на всем интервале (t_a, t_b) .

Таким образом, система Сен-Венана (5.35), (5.54), (5.55) управляема на множестве $S = (t_a, t_d) \times x_0$ относительно расхода воды на левой границе канала по целевому функционалу (5.57) при условии (5.79) Влияние управления реализуется на правой границе канала на множестве $S' = (t_c, t_b) \times x_1$. При управлении со штрафным функционалом (5.61), т.е. – по функционалу $J = J_0 + J_F$, СРП управляема из области $S = S = (t_a, t_b) \times x_0$. Влияние такого управления сказывается почти на всю пространственно-временную область Σ функционирования канала за исключением нижнего треугольника рис. 5.2.

5.6. Градиент в задаче оптимального управления охлаждением непрерывного слитка

Задача получения качественных непрерывных слитков при затвердевании стальных расплавов подробно рассмотрена в §4 главы 1. На рис. 1.5 приведена принципиальная схема установки для непрерывного вертикального литья металла.

Уравнение теплопереноса (1.20) в непрерывном цилиндрическом слитке для более компактных дальнейших преобразований с целью получения градиента ∇J удобно записать в дивергентной форме:

$$\text{Ср}W\frac{\partial T}{\partial z} - \text{div}[\lambda \text{grad}T] = 0 \quad \text{на } \Sigma = \{r, z: 0 < r < R, 0 < z < Z\}, \quad (5.82)$$

где $T(r, z) \in V = L_2(\Sigma)$ - температура слитка, W - скорость литья, $\rho(T)$ - плотность слитка, $C(T)$ и $\lambda(T)$ - эффективные теплоемкость и теплопроводность. СРП (5.82) имеет эллиптический тип по координате r .

Граничные условия для СРП (5.82) имеет вид:

$$\left. \text{grad}T \right|_{\substack{r=0 \\ 0 < z < Z}} = 0, \quad \left. T \right|_{\substack{0 < r < R \\ z=0}} = T_0, \quad \left. \lambda_s \text{grad}T \right|_{\substack{r=R \\ 0 < z < z_c}} = -\gamma(T - T_c), \quad (5.83)$$

$$\left. \lambda_s \text{grad}T \right|_S = u, \quad S = \{r, z: r=R, z_c < z < Z\}, \quad (5.84)$$

где z_c - нижняя граница кристаллизатора (см. рис. 1.8), T_c - температура кристаллизатора, γ - коэффициент теплопередачи в зоне кристаллизатора, $u = u(z)$ - отток тепла в зоне вторичного охлаждения. Ограничение на управление отсутствует, т.е. $u \in J = L_2(S)$.

Для снижения термонапряжений и предотвращения образования трещин, необходимо минимизировать следующий функционал:

$$J_0 = \int_{S'} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]^2 d\Sigma = \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]^2 \theta(r - r_c) \theta(z - z_c) r dr dz, \quad (5.85)$$

где S' - область твердой фазы слитка в зоне вторичного охлаждения (черные точки на рис. 1.8), θ - функция Хевисайда, r_c - радиус границ твердой фазы. Элементарный объем слитка в цилиндрической системе координат $d\Sigma = r dr dz$.

Таким образом, задача оптимизации полей температур слитка формулируется следующим образом. Необходимо найти оптимальный поток тепла $u(z)$, в граничном условии (5.84), который минимизирует термонапряжения в форме функционала (5.85). При этом температура слитка на выходе из зоны вторичного охлаждения не должна превышать некоторую максимально допустимую температуру T_{max} , т.е. необходимо удовлетворить ограничение на состояние СРП в форме:

$$T \Big|_{0 < r < R} \leq T_{max}. \quad (5.86)$$

Согласно (4.48) ограничение (5.86) будем учитывать в виде штрафного функционала. При этом целевой функционал примет вид:

$$J = J_0 + \zeta J_F \rightarrow \inf, \quad (5.87)$$

где $J_F = \int_S I_F dr$ - штрафной функционал, $S = [0, r] \times Z$ - область определения штрафного функционала, ζ - весовой коэффициент, I_F - штрафная функция. Принималась следующая внешняя штрафная функция

$$I_F = (T - T_{max})^2 \quad (5.88)$$

при $T > T_{max}$, иначе $I_F = 0$.

Теперь перейдем к определению градиента ∇J . СРП (5.82), линеаризованная относительно $\delta T \in V(\Sigma)$, имеет вид:

$$\epsilon \frac{\partial C_p}{\partial T} \delta T W \frac{\partial T}{\partial z} + C_p W \frac{\partial \delta T}{\partial z} - \operatorname{div} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial T} \delta T \operatorname{grad} T + \lambda \operatorname{grad} \delta T \right] = 0 \in V(\Sigma) \quad (5.89)$$

Граничные условия принимают вид:

$$\operatorname{grad} \delta T \Big|_{r=0} = 0, \quad \delta T \Big|_{z=0} = 0, \quad \lambda_s \operatorname{grad} \delta T \Big|_{r=R} = -\gamma \delta T, \quad (5.90)$$

$$\lambda_s \operatorname{grad} \delta T \Big|_s = \delta u.$$

Линеаризованный функционал (5.87) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \delta J = & - \int_{\Sigma} 2 \left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r-r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r-r_s) \right] \theta(z-z_c) \delta T dr dz + \\
 & + \int_{\Sigma} 2R \frac{\partial T}{\partial r} \delta T dz + \int_{\Sigma''} \zeta I'_F \delta T dr = \\
 = & -2 \left[\left[\left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta(r-r_s) + r \frac{\partial T}{\partial r} \delta(r-r_s) \right] \theta(z-z_c), \delta T \right]_{V^*(\Sigma)} + \\
 & + \left(2R \frac{\partial T}{\partial r}, \delta T \right)_{V^*(\Sigma)} + \left(\zeta I'_F, \delta T \right)_{V^*(\Sigma'')}, \quad (5.91)
 \end{aligned}$$

где производная штрафной функции

$$I'_F = \begin{cases} 2(T-T_{\max}), & \text{если } T > T_{\max}, \\ 0, & \text{если } T \leq T_{\max}. \end{cases} \quad (5.92)$$

Для отображения линеаризованной СРП (5.89) в пространство R введем линейный функционал $f \in V^*(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на уравнение (5.89):

$$(f, e)_{V^*(\Sigma)} = \int_{\Sigma} f e d\Sigma = 0 \in R \quad (5.93)$$

Преобразуем данное выражение к виду скалярного произведения относительно вариации δT . Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$f C_{pW} \frac{\partial \delta T}{\partial z} = \frac{\partial C_{pW} \delta T}{\partial z} - C_{pW} \frac{\partial f}{\partial z} \delta T;$$

$$f \operatorname{div} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \operatorname{grad} T \delta T \right) = \operatorname{div} \left(f \frac{\partial \lambda}{\partial T} \delta T \operatorname{grad} T \right) - \operatorname{grad} f \operatorname{grad} T \frac{\partial \lambda}{\partial T} \delta T;$$

$$f \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} \delta T) = \operatorname{div} (f \lambda \operatorname{grad} \delta T) - \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} f \delta T) + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} f) \delta T.$$

Полученные дополнительные слагаемые, содержащие оператор

дивергенции, в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса легко интегрируются по r и по z в выражении (5.93). Окончательно, с учетом (5.90), выражение (5.92) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 (f, \theta)_{V^*(\Omega)} = & \int_{\Sigma} \left[-C\rho W \frac{\partial f}{\partial z} + fW \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \delta T d\Sigma + \int_s \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \delta T dz + \int_{s''} \left[\gamma f + \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \right] \delta T dz + \\
 & + \int_s \left[-f \delta u + \lambda_s \frac{\partial f}{\partial r} \delta T \right] dz + \int_{s''} [f C_s \rho_s W + \epsilon I'_F] \delta T dr. \quad (5.94)
 \end{aligned}$$

Теперь можно объединить выражение (5.94) с линейризованным функционалом (5.91). Для того, чтобы избавиться от компоненты градиента ∇J , принадлежащей сопряженному пространству состояний V^* , потребуем:

$$\begin{aligned}
 C\rho W \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial f}{\partial r} \right) - W \frac{\partial C\rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} f - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} + 2 \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) \theta (r-r_s) + \right. \\
 \left. + r \frac{\partial T}{\partial r} \theta (r-r_s) \right] = 0, \quad (r, z: 0 < r < R, z_c < z < Z) \quad (5.95)
 \end{aligned}$$

На границах области потребуем:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda_s \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=R} = -\gamma f, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_s = -2r \frac{\partial T}{\partial r}, \\
 \left. f \right|_{z=Z} = -\frac{\zeta}{C\rho W} I'_F \quad (5.96)
 \end{aligned}$$

При этом вариация целевого функционала (5.87) принимает вид:

$$\delta J = - \int_s f \delta u dz = (\nabla J, \delta u)_{V^*(\Omega)}, \quad (5.97)$$

откуда следует, что градиент - это

$$\nabla J = -f \in U^*(S). \quad (5.98)$$

Очевидно, что СРП (5.95), (5.96) так же имеет эллиптический тип, как и исходная СРП (1.20), (1.22). Для функционала (5.87), заданного в твердой части S' слитка и на нижней границе S'' , его градиент (5.98) находится через нетривиальное на S решение f линейной сопряженной СРП (5.95) с граничными условиями (5.96).

Таким образом, в §3-§6 данной главы мы нашли необходимые выражения для вычисления градиента ∇J от неявно заданных функционалов $J(u)$ для всех задач оптимизации, сформулированных в первой главе. Во всех случаях градиент ∇J выражается через решение линейных СРП того же типа, что и исходные СРП.

6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ

6.1. Оптимальное управление потоком тепла в простейшем химическом реакторе

В §1 главы 1 была сформулирована тестовая одномерная нестационарная задача (1.1)–(1.7) оптимального управления внешним потоком тепла $u(t)$ в химическом реакторе (см. рис. 1.1) с целью удержания реакции в заданном температурном режиме. В §5 главы 5 получен градиент целевого функционала и обоснована управляемость СРП относительно потока тепла u по квадратичному и недифференцируемому целевым функционалам. В данном параграфе мы рассмотрим конкретные численные решения поставленной тестовой задачи разработанными в главе 4 прямыми экстремальными алгоритмами (4.27) – (4.29), основанными на новых НУО и ДУО главы 3.

Исходная (1.1)–(1.3) и сопряженная (5.30)–(5.33) параболические СРП решались численно по широко известной неявной конечно-разностной схеме Кранка–Николсона второго порядка точности [5] с десятью шагами по пространству и со ста шагами по времени. При этом осуществлялась аппроксимация множества $S = \bigcup_{i=1}^{100} t_i \times x_i$. Если бы проводилась аппроксимация не только СРП (1.1)–(1.3), а всей задачи оптимального управления (1.1)–(1.5), то пришлось бы минимизировать функцию 100 аргументов, поскольку в этом случае, вместо целевого функционала (1.4) или (1.5), мы бы имели целевую функцию $J(u_i) \quad i=1, \dots, 100$, т.е. $u \in E^{100}$.

Расчеты проводились при следующих значениях: шаг по пространству $\Delta x = 0.02\text{м}$, шаг по времени $\Delta t = 1.5\text{с}$, теплоемкость $C = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, плотность $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, теплопроводность $\lambda = 470 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, отток тепла на внутренней стенке реактора $q_0 = 150 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$, начальная температура стенки реактора $T_w = 300\text{К}$. Шаг по времени выбирался из условия

$$\frac{\lambda}{C\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5,$$

в частности, при $\Delta t = 1.5\text{с}$ значение выражения в данном условии составляет 0.45. Приведенное условие является обязательным требованием для обеспечения устойчивости явных конечно-разностных

схем. Хотя, схема Кранка-Николсона абсолютно устойчива, как всякая неявная схема, согласование шага по времени с шагом по пространству необходимо для достижения наилучшей точности расчетов. Тестовые решения прямой задачи (1.1)-(1.3) подтвердили этот известный факт.

Тестовые расчеты задачи оптимизации (1.1)-(1.7) организовывались следующим образом. На внешней границе x_1 стенки реактора задавалось управление

$$u_*(t) = 100 + 50 \sin[2\pi t / (t_b - t_a)] \text{ кДж/м}^2 \text{ с} \quad (6.1)$$

и рассчитывалась температура на внутренней границе x_0 стенки реактора. Данная температура принималась оптимальной температурой T_* и решалась обратная задача о нахождении управления $u(t)$, на $S = (t_a, t_b) \times x_1$, доставляющего минимум соответствующему целевому функционалу.

Сначала была исследована задача оптимального управления для дифференцируемого целевого функционала (1.4). Проверка условия (3.11) подтвердила наличие оврага у данного функционала. Кроме условия (3.11) в тестовых задачах оптимизации для оценки овражности целевого функционала можно использовать бесконечномерный аналог методики (3.5), описанной в §1 главы 3. Если начальное приближение управления

$$u^0(t) - u_*(t) \approx \text{const} \quad \forall t \in (t_a, t_b), \quad (6.2)$$

т.е. оно приблизительно равно удалено от оптимального значения для всех точек t , то для функционала J , не имеющего оврага, необходимо:

$$\nabla J^0(t) \approx \text{const} \quad \forall t \in (t_a, t_b). \quad (6.3)$$

В таблице 6.1 приведены некоторые значения градиента ∇J^0 для начального приближения управления $u^0 = 400 \text{ кДж/м}^2 \text{ с}$. Из таблицы видно, что ∇J^0 изменяется на 7 порядков от начального t_a до конечного t_b момента времени управления. Согласно (6.3), следует, что целевой функционал J имеет существенно выраженный овражный характер. Функционал J слабо чувствителен к управлению u в последние моменты времени. Такие "последние моменты" составляют относительно большое множество $s \approx 10\%$ от S , т.е. $s = (t_1, t_b) \times x_1$, $t \approx 90$.

Результаты минимизации дифференцируемого целевого функционала (1.4) традиционными алгоритмами приведены в §5 главы 2. Плохая сходимость на множестве z приводит к искажению искомого управления на всем множестве S . Из таблицы 2.1 видно, что классическое требование $\|\nabla J^k\| \rightarrow 0$ выполняется, однако, согласно рис. 2.1 и 2.2 $u^k \rightarrow u_*$, особенно на z .

Таблица 6.1. Градиент целевого функционала (1.4) на начальной и конечной итерациях для оптимального управления (6.1)

	1	10	40	60	90	100
$\nabla J^0(t_i)$	2.3	2.2	1.6	0.86	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$\nabla J^{250}(t_i)$	$-7 \cdot 10^{-4}$	$-6 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$

В таблице 6.1 приведены значения градиента ∇J на начальной и последней ($k=250$) итерации для традиционного метода наискорейшего спуска (МНС). На последней итерации значения функции ∇J в моменты времени $t \in S$ уменьшились на 4 порядка, функция ∇J перестала быть монотонно убывающей, она изменила свой знак. В то же время на z функция ∇J уменьшилась только на 2 порядка и полностью сохранила свой монотонный характер и знак. Все это говорит о том, что при реализации традиционного интегрального НУО (требование $\|\nabla J^k\| \rightarrow 0$) практически отсутствует сходимость на множестве z . По-существу функция $\nabla J^k \rightarrow 0$ на z . Отсутствует равномерная сходимость и в пространстве управлений и в сопряженном пространстве градиентов - таблица 6.2.

В последней таблице для МНС приведены две колонки, отражающие относительное изменение градиента ∇J^k в начальный и конечный моменты времени управления по отношению к его начальному значению ∇J^0 в те же моменты времени. Здесь

$$N_1^k = |\nabla J^0(t_1) / \nabla J^k(t_1)|, \quad N_{100}^k = |\nabla J^0(t_{100}) / \nabla J^k(t_{100})|.$$

Видно, что градиент целевого функционала стремится к нулю существенно неравномерно. Значение ∇J быстро убывает в начальный момент времени и очень медленно убывает в конечный момент времени управления реактором.

Таблица 6.2. Минимизация целевого функционала (1.4) с разными шаблонными приближениями для оптимального управления (6.1)

Итерация	МНС (без шаблонов)		Метод (4.12+27), шаблон без НУО		Метод (4.12+27), шаблон с НУО	
	N_1^k	N_{100}^k	N_1^k	N_{100}^k	N_1^k	N_{100}^k
1	1.38	1.28	1.55	1.50	1.67	1.66
3	2.00	1.65	2.76	2.52	3.64	3.55
5	5.87	2.91	22.2	93.1	5.28	5.62
7	10.1	9.17	8.00	18.1	11.6	13.2
10	226	5.81	32.9	161	74.9	49.3
20	280	10.2	888	140	553	865
250	5248	58.7	33487	5047	5987	16702

Перейдем к исследованию разработанных алгоритмов минимизации с регулируемым направлением спуска, которые построены на локальной форме НУО и учитывают ДУО.

Пусть отсутствуют ограничения на управление. Для адаптации алгоритмов (4.27) и (4.28) согласно методу (4.12), (4.13) в первом способе адаптации на начальных итерациях были заданы шаблонные приближения в виде постоянных на S функций ϕ^k . В этом случае параметр β , адаптирующий экстремальные алгоритмы (4.27) и (4.28) к овражности целевого функционала (1.4) и к различным вычислительным погрешностям, задавался следующим образом:

$$\beta^k(t) = \left| \frac{0.2\phi^k}{\nabla J^k(t)} \right|, \quad \phi^0 = u^0 = 400 \text{ КДж/м}^2 \text{ с.} \quad (6.4)$$

Напомним, что данный способ адаптации не использует в явном виде локальную форму НУО и является эвристическим.

Во втором способе адаптации шаблонные функции задавались исходя из локальной формы НУО: $\nabla J^k \rightarrow 0$ п.в.С. Для приблизительной реализации данного НУО на первых итерациях потребовались линейные шаблонные приближения функций $\phi^k(t)$ с изменяющимся углом наклона. Параметр β^k при этом задавался из условия:

$$\beta^k(t) = \left| \frac{0.2(\phi^k(t) + 0.0033t\phi^0)}{\nabla J^k(t)} \right|, \quad \phi^0 = u^0 = 400 \text{ КДж/м}^2\text{с}. \quad (6.5)$$

На рис 6.1 представлены предпоследние шаблонные аппроксимации на третьей итерации для управления u^3 . Сплошная линия - это эвристические шаблоны с параметром β^k (6.4), штрихпунктирная линия - это шаблоны, построенные на локальной форме НУО с параметром β^k (6.5).

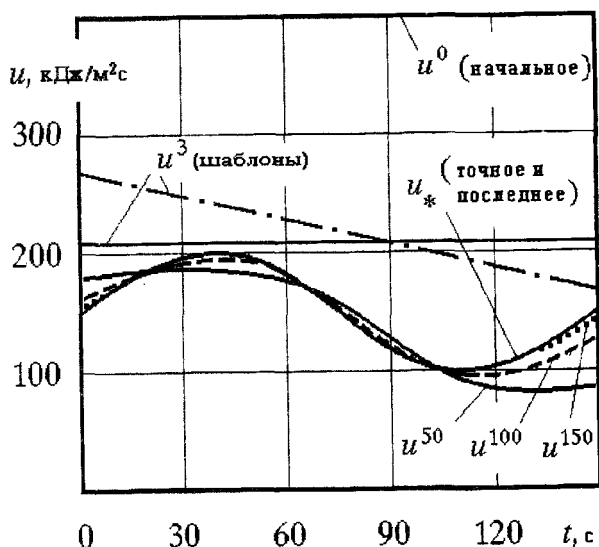


Рис. 6.1. Оптимальное управление тепловым потоком в химическом реакторе

В таблице 6.2 показано относительное изменение градиента ∇J^k в начальный и конечный моменты времени управления по отношению к его начальному значению ∇J^0 для обоих способов выбора шаблонных функций. Видно, что градиент целевого функционала при постоянных шаблонах (эвристический метод) по формуле (6.4) стремится к нулю

равномерно с некоторыми осцилляциями в скорости убывания. При наклонных шаблонах (учет локальной формы НУО) по формуле (6.5) градиент стремится к нулю равномерно без осцилляций. Можно считать, что постоянные и наклонные шаблоны неплохо реализуют требование (4.10) локальной формы НУО:

$$\nabla J^k \rightarrow 0 \text{ п.в.} S$$

Напомним, что при реализации традиционной интегральной формы НУО значение ∇J убывает существенно неравномерно на S , что наглядно видно из последней строки таблицы 6.2 – МНС (без шаблонов).

Метод (4.12), (4.13) для обоих способов выбора шаблонов, согласно условию (4.14), заканчивался на итерации 4. При этом в первой половине времени управления положительные локальные значения градиента ∇J сменились на отрицательные. Это означает, что шаблонные приближения на четвертой итерации подошли ко дну оврага. После чего был организован возврат на предыдущую 3-ю итерацию и, согласно (4.15), было принято

$$\alpha^3(t) = \beta^2(t). \quad (6.6)$$

Повторение 4-й итерации и все последующие итерации выполнялись с неизменным параметром $\alpha^k = \alpha^3$ по методу (4.27). Организация прыжков вокруг экстремального управления контролировалась по условию (4.26), согласно которому были заданы числа $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.6$. Результаты минимизации представлены на рис. 6.1.

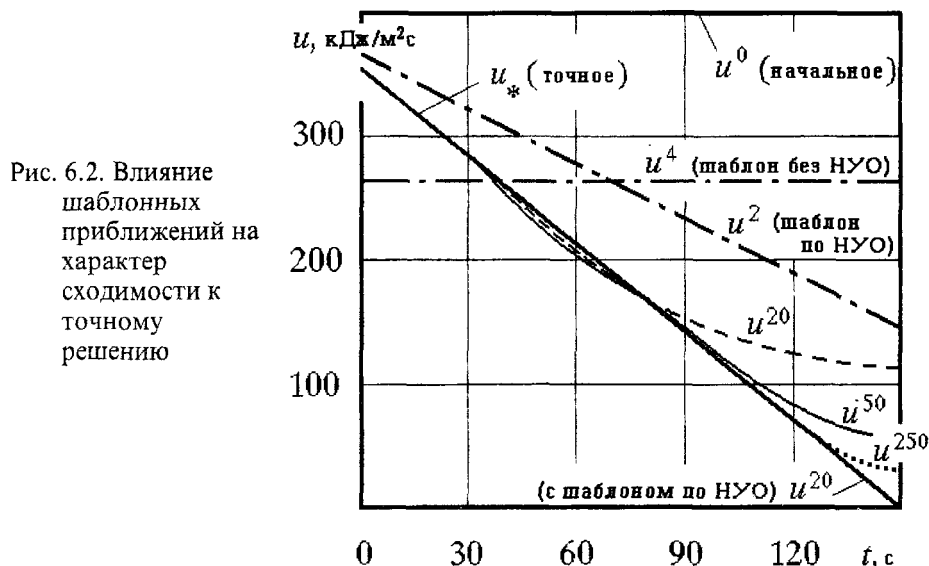
Таблица 6.3. Минимизация целевого функционала (1.4) методами с регулируемым направлением спуска для оптимального управления (6.1)

Итерация	Метод (4.27)			Метод (4.28)		
	J^k	$\Delta u^k, 10^4$	$\ \nabla J^k\ $	J^k	$\Delta u^k, 10^4$	$\ \nabla J^k\ $
0	41650	266	17	41650	266	17
10	16	28	0.08	26	24	0.4
30	0.9	27	0.02	0.3	24	0.006
50	0.4	23	0.006	0.02	4.4	$8 \cdot 10^{-4}$
100	0.1	10	0.003	$5 \cdot 10^{-4}$	3.5	$3 \cdot 10^{-4}$
150	0.03	4.4	0.002	$5 \cdot 10^{-5}$	1.7	$4 \cdot 10^{-5}$
250	$6 \cdot 10^{-3}$	2.4	$4 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}	1.7	$8 \cdot 10^{-5}$

Из рис.6.1 видно, что метод (4.27) имеет хорошую равномерную сходимость и дает принципиально лучшее решение по сравнению со всеми традиционными методами. Последнее приближение u^{250} на рисунке совпадает с оптимальным управлением u_* . В таблице 6.3 приведены некоторые значения целевого функционала (1.4) и невязки решений $\Delta u^k = \|u^k - u_*\|$. Из сравнения данных таблицы 6.3 с аналогичными данными таблицы 2.1 видно, что метод (4.27) на 2-3 порядка лучше минимизирует функционал J и более чем на порядок - невязку Δu .

Оба способа выбора шаблонных функций ϕ^k в данной тестовой задаче дали приблизительно одинаковые очень хорошие результаты. Это не означает, что вид шаблонных функций не влияет на скорость сходимости и на точность решения задач оптимизации. На рис. 6.2 приведены результаты решения следующей тестовой задачи. Здесь оптимальное управление задавалось в виде прямой линии с большим наклоном:

$$u_*(t) = 350 - \frac{350(t-t_a)}{t_b-t_a} \text{ кДж/м}^2\text{с.} \quad (6.7)$$



Для задания шаблонных приближений согласно локальной форме НУО (4.10) потребовались линейные наклонные шаблоны с параметром

$$\beta^k(t) = \left| \frac{0.1(\phi^k(t) + 0.035t\phi^0)}{\nabla J^k(t)} \right|, \quad \phi^0 = u^0 = 400 \text{ Дж/м}^2 \text{ с.} \quad (6.8)$$

В таблице 6.4 для таких шаблонов показано относительное убывание градиента целевого функционала. Видно, что ∇J убывает равномерно и без осцилляций. Всего было сделано три шаблонных аппроксимации до смены знака градиента ∇J . Дальнейший спуск по методу (4.27) всего за 20 итераций обеспечил практическое совпадение приближения управления u^{20} с точным оптимальным значением (6.7). При этом невязка управлений Δu^{20} уменьшилась со $110 \cdot 10^4$ до $2.4 \cdot 10^4$.

Таблица 6.4. Минимизация целевого функционала (1.4) с разными шаблонными приближениями для оптимального управления (6.7)

Итерация	Метод (4.12+27), шаблоны без НУО		Метод (4.12+27), шаблоны с НУО	
	N_1^k	N_{100}^k	N_1^k	N_{100}^k
1	2.18	1.76	3.01	2.89
3	40.5	4.5	3.72	4.12
5	3.10	18	3.46	3.41
7	3.01	2.97	106	315

Шаблонные приближения без учета локальной формы НУО, согласно эвристической методике (6.4), продемонстрировали заметно худшую сходимость (см. рис. 6.2). Градиент стремился к нулю со значительными осцилляциями в скорости убывания (см. таблицу 6.4). Было сделано 250 итераций, однако столь хорошего совпадения с точным решением, как в предыдущем случае, достигнуто не было. Здесь невязка управлений Δu^{20} уменьшилась всего лишь до $75 \cdot 10^4$, а за 250 итераций - до $8.5 \cdot 10^4$, что по-прежнему хуже предыдущего расчета.

Таким образом, в общем случае, необходимо использовать шаблонные аппроксимации, удовлетворяющие локальной форме НУО. Именно такие шаблоны обеспечивают равномерную и относительно

быструю сходимость к оптимальному решению. Они позволяют реализовать НУО—Теорема 3.1 (Следствие 3.1) с достаточно хорошей точностью.

Далее для первой тестовой задачи (6.1) исследовался метод (4.28), основанный на методе сопряженных градиентов. Как и следовало ожидать, он продемонстрировал существенно более высокую скорость сходимости по сравнению с методом (4.27). Здесь принимались $b_1=1.2$, $b_2=0.3$, а параметр β задавался по формуле (6.4). Всего за 40 итераций была достигнута точность, соответствующая 150 итерациям метода (4.27). Соответствующие результаты расчетов представлены в таблице 6.3.

Для минимизации недифференцируемого целевого функционала (1.5) использовался метод (4.27) с параметрами $b_1=1.2$, $b_2=0.6$. Здесь оптимальное управление u_* является строго сингулярной точкой функционала J (1.5). Поскольку начальные шаблонные приближения в данной негладкой задаче можно выбирать только из условия заметного изменения управления на S , то параметр β вычислялся эвристически по формуле (6.4).

Графическое представление результатов минимизации для дифференцируемого и недифференцируемого функционалов практически совпадает друг с другом, с той лишь разницей, что недифференцируемый функционал (1.5) минимизировался быстрее. Здесь за 30 итераций достигалось приближение u^{100} , соответствующее минимизации функционала (1.4). Сходимость практически завершалась за 100 итераций при значении управления u^{100} , которое соответствовало u^{150} при минимизации дифференцируемого функционала.

Из таблицы 6.5 видно, что градиент целевого функционала (1.5) ведет себя принципиально иначе, чем при минимизации функционала (1.4), здесь $\|\nabla J^k\| \rightarrow 0$. Согласно НУО (4.20) строго сингулярной точки необходимо $b^k \rightarrow 0$. В расчетах было получено уменьшение b^k в 600 раз. В то же время, при минимизации дифференцируемого функционала, число b^k возросло в 11 раз.

Столь значительное уменьшение b^k при $\|\nabla J\| \approx \text{const}$ практически завершило сходимость алгоритма минимизации. Можно считать, что НУО (4.20) было реализовано. Требование (4.26) ДУО для строго сингулярного управления u_* выполнялось вблизи u_* через каждые 2–3 итерации. Реализация НУО и ДУО обеспечили достижение оптимального управления с высокой точностью.

Таблица 6.5. Минимизация недифференцируемого целевого функционала (1.5) для оптимального управления (6.1)

Итера ция	Метод (4.27)		
	J^k	$\Delta u^k, 10^4$	$\ \nabla J^k\ $
0	1884	266	0.4
10	32	20	0.1
50	5.1	9.1	0.06
100	4.2	7.2	0.045
150	3.9	7.4	0.042
250	3.3	8.6	0.053

Исследовалась задача минимизации дифференцируемого функционала (1.4) при наличии ограничения (1.6):

$$u \in U_{\text{ад}} = \{u: u \geq u_{\min} = 150 \text{ кДж/м}^2\text{с}\}. \quad (6.9)$$

Данное ограничение реализовывалось методом проекции спуска (4.36):

$$u^{k+1} = P_{U_{\text{ад}}} \left[u^k - \rho^k \alpha^k \nabla J^k \right],$$

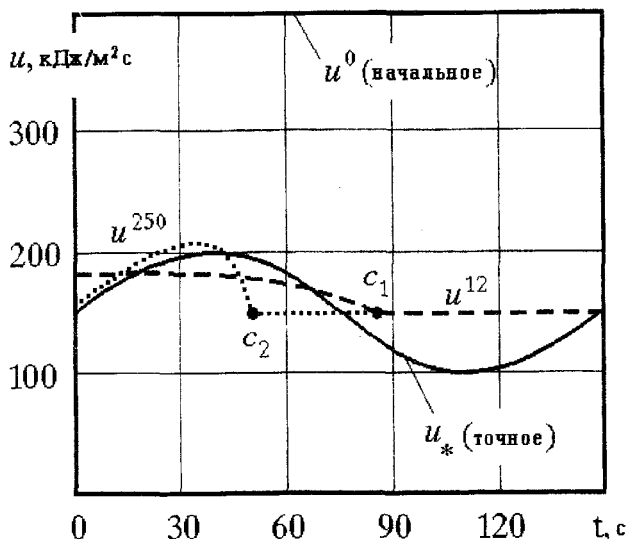
для тех моментов времени, где $u^{k+1}(t) < u_{\min}$, принималось $u^{k+1}(t) = u_{\min}$.

На рис. 6.3 представлены результаты оптимального управления с ограничением (6.9). Здесь оптимальное управление доставляет целевому функционалу (1.4) краевой минимум.

На итерации $k=12$ управление $u^k(t)$ выходит за границу допустимого множества $U_{\text{ад}}$. После времени $t \approx 85\text{с}$ управление $u^{12}(t) < u_{\min}$. Начиная с этой итерации $P_{U_{\text{ад}}} \neq 1$ и управление u^{12} принимает вид, изображенный на рис. 6.3 — пунктирная линия. Управление u^{12} лежит на границе допустимого множества, т.е. $u^{12} \in \partial U_{\text{ад}}$. Дальнейший спуск осуществляется вдоль границы $\partial U_{\text{ад}}$, о чем свидетельствует смещение характерного излома функции $u^k(t)$ из точки c_1 в точку c_2 .

Мы видим, что ограничения на допустимое множество управлений типа (1.6) в прямом экстремальном подходе реализуются очень просто.

Рис. 6.3. Оптимальное управление тепловым потоком с ограничением $u \geq 150 \text{ кДж/м}^2\text{с}$



На рис. 6.4 - 6.7 представлены результаты управления тепловым потоком в химическом реакторе с недифференцируемым целевым функционалом (1.5) новым методом минимизации (4.29) для третьего тестового значения оптимального управления:

$$u_*(t) = \begin{cases} -0.05(t-60)^2 + 150 \text{ кДж/м}^2\text{с}, & t < 60, \\ 150 \text{ кДж/м}^2\text{с}, & t \geq 60. \end{cases} \quad (6.10)$$

Начальному приближению $u^0 = 300 \text{ кДж/м}^2\text{с}$ (серая линия 1 на рис. 6.4) соответствует температура реакции - кривая 1 рис. 6.5, которая существенно не удовлетворяет оптимальной температуре T_* . При этом

$$J^0 = 12560, \quad \max_t |T^0 - T_*| = 93.8\text{К},$$

а начальная невязка управлений

$$\Delta u^0 = |u^0 - u_*| = 225 \cdot 10^4.$$

Рис. 6.4. Оптимальное управление тепловым потоком в химическом реакторе:
 1,3 - начальные приближения;
 2 - оптимальное управление с ограничением на скорость ввода тепла
 $\max du/dt = 1.5$
 $\text{кДж/м}^2\text{с}^2$

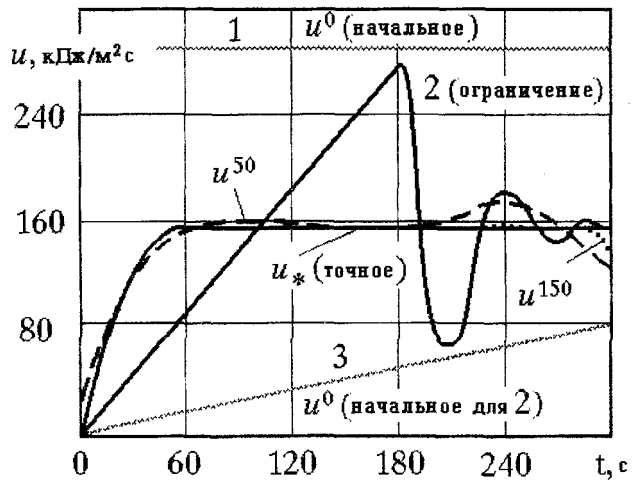


Рис. 6.5. Температура реакции:
 1 - для начального приближения управления 1 рис. 6.4;
 2 - при управлении с ограничением на корость ввода тепла

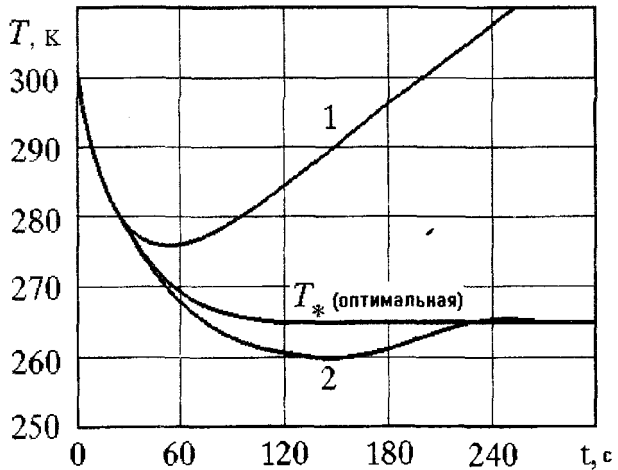


Рис. 6.6. Осциллирующие значения 1,2 управления относительно стогого сингулярного точного решения

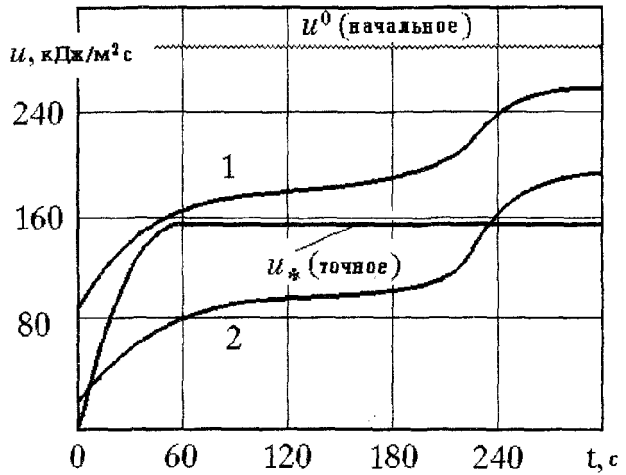
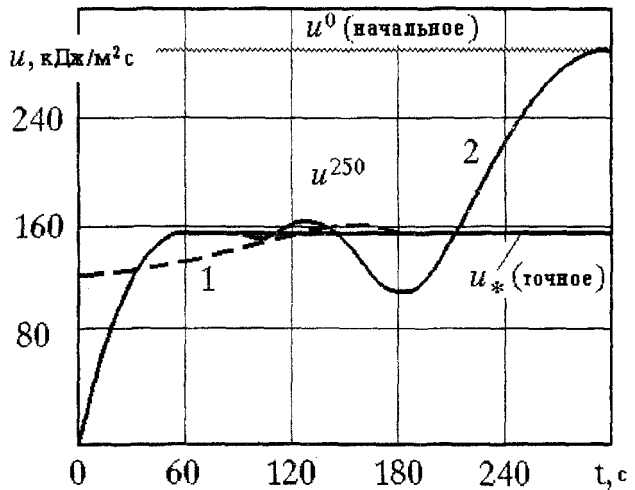


Рис. 6.7. Отсутствие сходимости к точному решению без учета достаточных условий оптимальности



Пунктирная и точечная кривые на рис. 6.4 - это управления, найденные новым методом (4.29) за 50 и 150 итераций соответственно. Последнее приближение $u^{150} \approx u^{250}$ и практически совпадает с точным значением u_* (6.10), а соответствующая температура реакции полностью совпадает с оптимальной кривой T_* на рис. 6.5. Полученному решению соответствует

$$J^{150} = 4.4 \text{ и } J^{250} = 3.3,$$

а невязка решений -

$$\Delta u^{250} = 6.45 \cdot 10^4.$$

При этом за все время управления максимальное расхождение температур составило $|T^{250} - T_*| = 0.06$ К. Это очень высокая точность.

Метод (4.29) реализовывался с числом $b_g = 0.95$ и параметром α^k , который на первых семи итерациях был адаптирован под целевой функционал (1.5) по методике (6.4). В конкретной рассматриваемой задаче оптимизации обойтись без адаптации, т.е. принять значение параметра $\beta^0(t) = \alpha^0(t) = 1$ оказалось неприемлемым, поскольку значения градиента целевого функционала в начальные и конечные моменты времени слишком сильно отличаются друг от друга, а именно, на 8 порядков.

Заданные значения b_g и α^k обеспечили равномерный спуск к оптимальному значению управления с заметными прыжками в окрестности u_* . Напомним, что спуск с прыжками вокруг минимума - это требование ДУО, которое метод (4.29) реализует, используя естественные поведения градиента ∇J - НУО (3.30) для случая строго сингулярной точки.

Такие прыжки привели к осциллирующему характеру убывания целевого функционала J , что демонстрируется в таблице 6.6 для итераций от 50 до 56. Из таблицы видно, что при этом норма градиента $\|\nabla J^k\| \rightarrow 0$. Необходимо отметить, что направление спуска в методе (4.29) после каждого прыжка в окрестности u_* перерегулируется параметром $\alpha^k(t)$ и обеспечивает разносторонний спуск с учетом ДУО: " $\nabla \Lambda^k$ ". Если этого не делать, то вместо прыжков вокруг минимума мы получим одни и те же возвратно-поступательные прыжки вдоль двух противоположных направлений-функций $\pm \Lambda^k(t)$. В конечно-мерном случае данная ситуация демонстрировалась в левой части рис. 4.4, а. В данном бесконечномерном случае мы получаем при $b_g = 1$ установившиеся за 30 итераций осцилляции - кривая 1 (соответствует четным итерациям при $J^k = 1701$ и $\|\nabla J^k\| = 1.576$) и кривая 2 (соответствует нечетным итерациям при $J^k = 1024$ и $\|\nabla J^k\| = 1.567$) на рис. 6.6.

Таблица 6.6. Минимизация недифференцируемого целевого функционала (1.5) методом (4.29) для оптимального управления (6.10)

k	50	51	52	53	54	55	56
J^k	188.5	80.9	181.7	61.9	175.1	47.4	75.7
$\ \nabla J^k\ $	1.51	1.57	1.52	1.57	1.52	0.72	1.12

Интересно отметить, что если $b^0 = b^k \neq \text{const}$, а выбирается по методу (4.18), начальное значение функции $\alpha^k(t)$ адаптируется по методике (6.4) до итерации $k=7$ и далее не изменяется, т.е. число $b_s=1$, то метод минимизации (4.29) превращается в метод (4.27). В этом случае осцилляции затухают, однако точное значение u_* за значительное число итераций не достигается, что демонстрирует кривая 1 на рис. 6.7. Получаем опять-таки большие значения функционала

$$J^{250} = 91.4 \quad (\text{вместо } 3.3)$$

и невязки управлений

$$\Delta u^{250} = 173 \cdot 10^4 \quad (\text{вместо } 6.45 \cdot 10^4).$$

Полученные результаты демонстрируют недостаточно хорошую сходимость первого метода (4.27) к тестовому значению оптимального управления u_* (6.10) по сравнению со значением (6.1). Оказалось, что первый метод минимизации в данной ситуации практически не реализует условие ДУО в части "чл". Здесь в окрестности u_* необходимы специальные эффективные перерегулирования направления спуска. Такие перерегулирования реализует при помощи числа b_s метод минимизации (4.29).

Кривая 2 на том же рис. 6.7 - это результаты минимизация целевого функционала обычным градиентным методом ($\alpha^k=1$) с параметром b^k по формуле (4.18), позволяющей реализовывать НУО (4.20) сингулярной точки. При этом функционал

$$J^{250} = 140,$$

а невязки управлений

$$\Delta u^{250} = 169 \cdot 10^4.$$

Таким образом, рис. 6.6 и рис. 6.7 иллюстрируют невозможность достижения точного решения в рассматриваемой задаче оптимального управления без учета ДУО.

Для тестового значения (6.10) оптимального управления исследовалось ограничение на допустимое множество управлений U_{ad} в виде ограничения на максимальную скорость ввода тепла в реактор при начальном закреплённом нулевом значении потока тепла:

$$\max \frac{du}{dt} = 1.5 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \text{с}^2), \quad (6.11)$$

$$u(t=0) = 0. \quad (6.12)$$

Данные ограничения легко преобразуются к известной форме:

$$U_{ad} = \{u: u(t) \leq u_{\max}(t)\}, \quad (6.13)$$

где $u_{\max}(t) = 1.5t \text{ кДж}/\text{м}^2 \text{с}$.

Ограничение (6.13) реализовывалось методом (4.36) проекции спуска на допустимое множество U_{ad} . Полученное решение представлено кривой 2 на рис. 6.4.

Стабилизация теплового режима реактора носит затухающий осциллирующий характер. Недостаточная подача тепла в начальные моменты времени при $t < 100 \text{с}$, когда управление $u(t)$ ограничено условием (6.13), приводит к переохлаждению реакции на 6К при $t \approx 150 \text{с}$ (рис. 6.5 кривая 2). Для возвращения к оптимальному режиму T_* требуется значительное увеличение притока тепла в средние моменты времени ($100 \text{с} < t < 190 \text{с}$), что в свою очередь, приводит к небольшому перегреву реакции и т.д.

Ограничения (6.11), (6.12) не позволяют использовать адаптацию алгоритмов минимизации при помощи методики (6.4), т.к. в рассматриваемом случае управление закреплёно в начальный момент времени. Использовался новый метод адаптации [32]. В условии (4.12) в соответствии с локальной формой НУО (4.10) задавались линейные шаблонные приближения, начиная с начального $u^0 = 0.233t \text{ кДж}/\text{м}^2 \text{с}$ - кривая 3 рис. 6.4, при помощи параметра

$$\beta^k(t) = \left| \frac{300t}{\nabla J^k(t)} \right|, \quad \phi^0 = u^0 = 0.233t \text{ кДж}/\text{м}^2 \text{с}. \quad (6.14)$$

Условие (6.14) обеспечивает шаблонный спуск в виде линейных аппроксимаций $u^k(t)$ с увеличивающимся углом наклона и закреплением в начальный момент времени. Число 300 – это коэффициент увеличения наклона.

На итерации $k=5$ произошло приближение ко дну оврага целевого функционала шаблонными функциями $\phi^k(t)$, определяемыми параметром $\beta^k(t)$ (6.14). О приближении ко дну свидетельствовало нарушение условия (4.13). После чего был задан параметр α :

$$\alpha^k(t) = \beta^k(t). \quad (6.15)$$

Далее реализовывался метод (4.29) с числом $b_a=0.98$ и начальным значением параметра α^k согласно (6.15).

Полученные в данном параграфе результаты подтверждают работоспособность и достоверность новых условий оптимальности и соответствующих алгоритмов минимизации функционалов. Тестовые расчеты демонстрируют высокую эффективность прямого экстремального подхода для решения задач оптимизации. Новые методы на несколько порядков лучше минимизируют целевые функционалы по сравнению с традиционными методами при тех же вычислительных затратах.

6.2. Идентификация коэффициента шероховатости открытого русла

В § 2 первой главы обсуждалась проблема идентификации параметров открытых русел для построения достоверных и точных математических моделей течения воды в открытых руслах. Здесь наиболее актуальной задачей, требующей первоочередного решения, является задача идентификации распределенного по длине русла коэффициента шероховатости. В §4 предыдущей главы был получен градиент целевого функционала и обоснована управляемость уравнений Сен-Венана – гиперболической СРП (5.35) относительно $u(x)$ по функционалам (5.39) и (5.40). В данном параграфе мы рассмотрим конкретные численные решения поставленной задачи прямыми экстремальными методами (4.27)–(4.29).

Исходная и сопряженная СРП рассчитывались по явной разностной

схеме сквозного счета одним из вариантов метода Годунова, примененным в работе [123] к расчету течений в гидравлических каналах.

Типичной особенностью сопряженной задачи (5.48) - (5.52), согласно условию (5.49), является то, что она рассчитывается назад во времени. Здесь с каждой границы уходит столько характеристик, сколько их приходит в исходной задаче. Другой особенностью сопряженной задачи является наличие разрывов в ее решениях даже при отсутствии таковых в решениях исходной задачи. Поскольку сопряженная СРП - линейная, то разрывы распространяются по характеристикам [58].

Наличие указанных разрывов предъявляет особые требования к численным методам. В связи с чем в работе применялся метод Годунова сквозного счета [123]. Суть его заключается в разностной аппроксимации условий совместности на характеристиках, записанных через частные производные. В этом случае они представляют собой уравнения переноса и аппроксимируются по схемам типа либо "левый уголок", либо "правый уголок" в зависимости от того, с какой стороны от рассчитываемой точки лежит область влияния на эту точку.

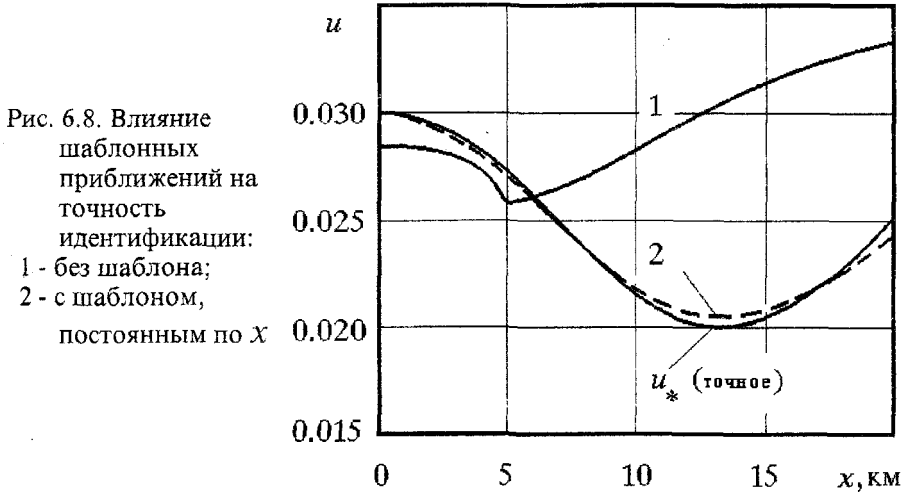
Для проведения тестовых расчетов задачи идентификации задавался следующий гипотетический канал: длина канала - 20км; трапецидальная форма поперечного сечения с шириной по дну 30м и откосом стенок (тангенс угла наклона стенок) - 4; уклон дна канала $t=0.0002$. Основные расчеты проводились при следующих условиях: начальный расход воды $Q(t_0, x) = 107 \text{ м}^3/\text{с}$; начальная глубина в верхнем створе $H(t_0, x_0) = 3.6 \text{ м}$; распределенный боковой расход $q=0$; пространственный шаг конечноразностной сетки $\Delta x = 1 \text{ км}$, соответствующий шаг по времени $\Delta t = 5 \text{ мин}$. Предполагается, что в начальный момент времени течение носит стационарный характер. При этом начальные условия (5.38) находятся по уравнениям Сен-Венана, преобразованным к стационарному виду.

Согласно условиям управляемости, полученным в конце §4 предыдущей главы, было определено минимально необходимое время для идентификации распределенного коэффициента шероховатости по функционалам (5.39), (5.40). Оно составляет 50мин. Это время, за которое характеристика ξ_+ с левой границы доходит до правой границы канала (см. рис 5.1). Физически это соответствует времени прохождения волны вдоль всего канала слева направо.

Тестовые расчеты для задачи идентификации организовывались аналогично предыдущему параграфу. Задавалось тестовое оптимальное значение коэффициента шероховатости русла:

$$u_*(x) = 0.025 + 0.005 \cos[3\pi x / (x_1 - x_0)], \quad (6.16)$$

и рассчитывался уровень воды $Z(t, x)$ на правой границе русла $S' = (t_0, t_1) \times x_1$. Данный уровень считался экспериментально наблюдаемым $Z_0(t)$ и решалась обратная задача об идентификации коэффициента шероховатости $u(x)$ по целевому функционалу (5.39) или (5.40).



На рис 6.8 представлены результаты идентификации за 20 итераций коэффициента шероховатости для дифференцируемого целевого функционала (5.39) [100]. Кривая 1 - это обычный градиентный метод с параметром $\alpha^k=1$, кривая 2 - это метод (4.27) с регулируемым направлением спуска и выбором шаблонных приближений согласно локальной форме НУО. Здесь

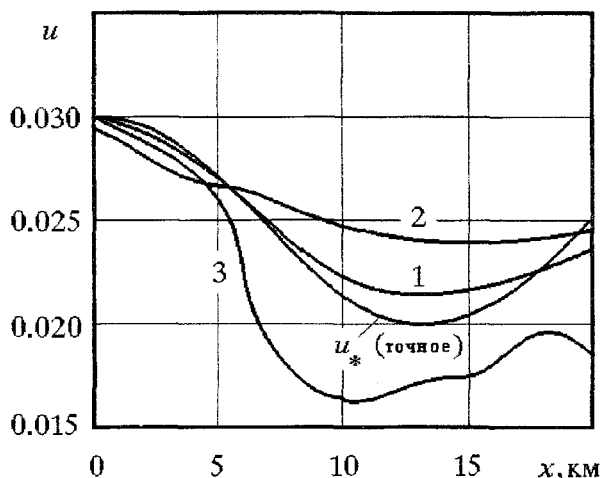
$$\beta^k(x) = \left| \frac{0.2\phi^k}{\nabla J^k(x)} \right|. \quad (6.17)$$

Начальное приближение коэффициента шероховатости $u^0 = \phi^0$ варьировалось в широких пределах, от 0.035 до 0.50. Шаблонные приближения заканчивались за 3-6 итераций. Для обеих кривых принималось $b^k = \text{const}$.

Из рис. 6.8 видно, что метод (4.27) с регулируемым направлением спуска имеет существенно лучшую сходимость по сравнению с традиционным градиентным методом. Кривая 2 демонстрирует быструю равномерную сходимость к точному решению u_* . За 20 итераций метода (4.27) максимальное расхождение уровней Z_0 и Z составило всего лишь 0.1 см.

В конце §2 главы 4 было отмечено, что метод (4.12), (4.13) шаблонных приближений позволяет в значительной степени адаптировать направление спуска к различным вычислительным и экспериментальным погрешностям задачи оптимизации. Для демонстрации данного утверждения "экспериментальный" уровень воды Z_0 был специально зашумлен генератором случайных чисел с шумами, лежащими в диапазоне ± 2 см, ± 5 см и ± 10 см. Результаты идентификации с такими шумами представлены на рис. 6.9 соответствующими кривыми 1-3.

Рис. 6.9. Влияние случайных погрешностей на точность идентификации:
 1 - диапазон зашумления уровня Z равен ± 2 см;
 2 - диапазон зашумления уровня Z равен ± 5 см;
 3 - диапазон зашумления уровня Z равен ± 10 см



Решение задачи идентификации всегда было устойчивым. Расхождение между зашумленными уровнями Z_0 и рассчитанными Z для

идентифицированных значений $u(x)$ не превосходили соответственно: 2.4см (кривая 1); 4.5см (кривая 2); 14.2см (кривая 3). Заметим, что техническая аппаратура, регистрирующая уровень воды в каналах и реках, производит измерения с точностью до 1см. Это означает, что тестирование новых методов минимизации функционалов проводилось в усложненной ситуации и показало прекрасные результаты по помехоустойчивости.

Для второй тестовой задачи минимизации недифференцируемого целевого функционала (5.40) было задано следующее оптимальное значение строго сингулярного коэффициента шероховатости

$$u_*(x) = 0.02 + 5 \cdot 10^{-2} x. \quad (6.18)$$

На рис. 6.10 и в таблице 6.7 приводятся результаты идентификации коэффициента шероховатости тремя методами: традиционный МНС с НУО (3.30) строго сингулярной точки; метод (4.27); метод (4.29). В расчетах принимались параметры $b_1=1$, $b_2=0.3$, $b_3=0.8$. Параметр $\alpha^0(x)$ определялся по первому шаблону согласно формуле (6.17).

Рис. 6.10.

Минимизация недифференцируемого функционала тремя методами:
 пунктирная линия - метод наискорейшего спуска;
 штрих-пунктирная - метод (4.27);
 точечная линия - метод (4.29)

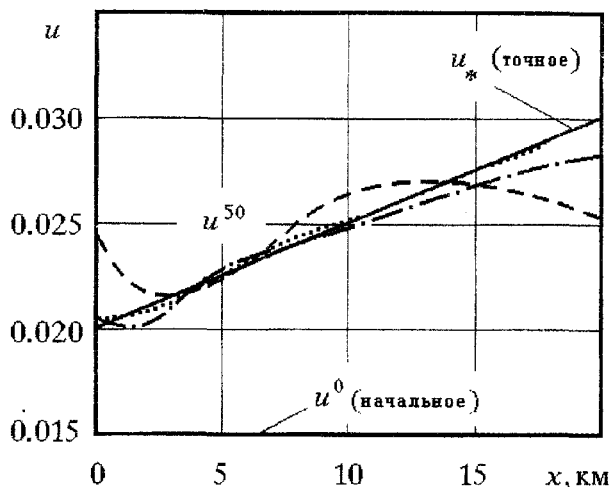


Таблица 6.7. Минимизация недифференцируемого целевого функционала (5.40) для оптимального управления (6.18)

Итерация	Метод наискорейшего спуска		Метод (4.27)		Метод (4.29)	
	$\Delta u^k, 10^4$	$\ \nabla J^k\ $	$\Delta u^k, 10^{-4}$	$\ \nabla J^k\ $	$\Delta u^k, 10^{-4}$	$\ \nabla J^k\ $
0	15339	918	15339	918	15339	918
15	2653	237	1074	785	414	796
50	2653	237	1060	785	340	161
НУО:	$b^{50}/b^0=10^{-22}$		$b^{50}/b^0=10^{-20}$		$\ \alpha^{50}\ /\ \alpha^0\ =3 \cdot 10^{-4}$	

Для всех исследуемых методов, как это видно из таблицы 6.7, норма градиента $\|\nabla J^k\|$ не стремится к нулю. В расчетах минимальное значение нормы равнялось 102 на итерации $k=36$ в методе (4.29).

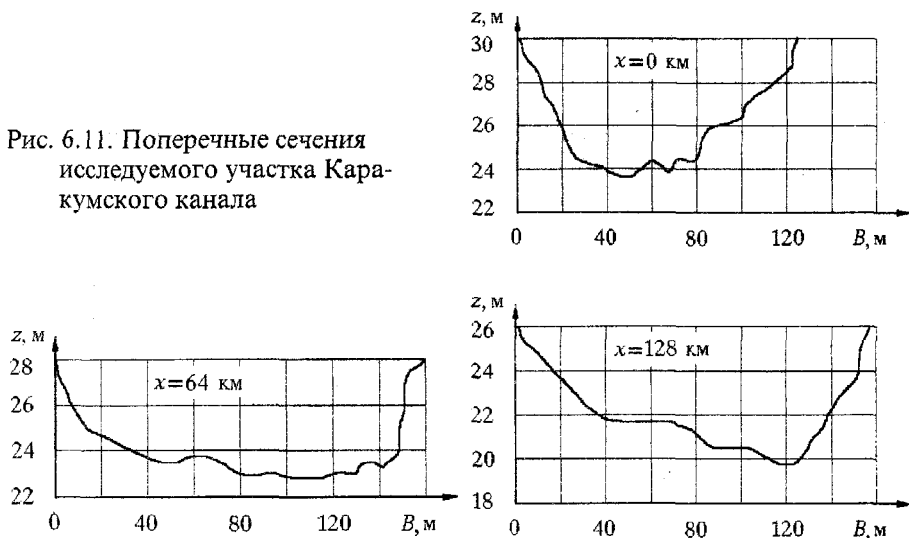
Из рисунка и таблицы видно, что традиционный МНС (пунктирная кривая) не дал положительных результатов. Алгоритм практически сошелся, НУО сторо сингулярной точки реализовалось с высокой точностью (глубина шагов уменьшилась на 22 порядка), однако точное решение получено не было. В то же время новые методы (4.27) (штрих-пунктирная кривая) и (4.29) (точечная кривая) дали прекрасные результаты. Наибольшую скорость сходимости продемонстрировал метод (4.29).

Плохая сходимость МНС объясняется тем, что он не может учитывать ДУО, а именно, — условие " ∇h^k ". Здесь $h^k \approx \pm h^5$ для всех $k > 5$.

Таким образом, тестовые задачи идентификации показывают, что новые методы минимизации функционалов, основанные не только на НУО, но и на ДУО, позволяют решать сложные задачи оптимизации с высокой точностью и помехоустойчивостью.

Разработанный и протестированный метод идентификации был применен для отыскания распределенного коэффициента шероховатости 128-километрового участка Каракумского канала по данным института "Совзгипроводхоз". Каракумский канал отводит из реки Аму-Дарья почти 8 км^3 воды в год на расстояние свыше 100 км.

Рис. 6.11. Поперечные сечения исследуемого участка Каракумского канала



Исходная информация о выбранном участке русла канала была представлена в его трех сечениях неправильной формы (см рис. 6.11) в граничных и среднем створах. В этих же створах были заданы экспериментальные уровень Z_0 и расход воды Q стационарного течения, которые приведены в таблице 6.8 для случая минимального наполнения русла. Материалом русла в начальном участке является супесь, в среднем и конечном – песок. По берегам канала имеется незначительная растительность в виде камыша.

Таблица 6.8. Данные о потоке воды на исследуемом участке Каракумского канала

x , км	0	64	128
Z_0 , м	28.2	26.7	23.9
Q , м ³ /с	183	183	175

Для расчета течения на исследуемом участке Каракумского канала по уравнениям Сен-Венана (1.8) была проведена подготовительная обработка исходной информации. Участок канала разбивался на 8 одинаковых ячеек Δx_i длиной по 16км. В каждом полученном сечении задавалась линия дна и форма русла из предположения линейного изменения имеющихся сечений - рис. 6.11. Начальные значения уровня и расхода в сечениях определялись графической интерполяцией по данным таблицы 6.8 из соображения плавности. Граничные условия задавались по расходу воды, согласно таблице 6.8. Распределенный боковой расход q определялся по формуле:

$$q_i = (Q_{i+1} - Q_i) / \Delta x_i, \quad i=1, \dots, 8. \quad (6.19)$$

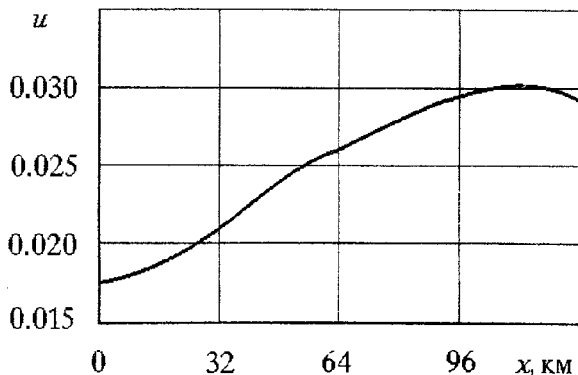
На этом подготовка исходной информации заканчивалась.

Целевой функционал (5.39) задавался на обоих граничных створах канала, т.е. здесь принималось множество

$$S' = (t_a, t_b) \times x_0 U(t_a, t_b) \times x_1. \quad (6.20)$$

Расчеты потока производились с шагом $\Delta t = 0.5$ ч в течение 5 часов, это приблизительно равно времени прохождения волн вдоль заданного участка канала, что удовлетворяет требованию управляемости. Начальное приближение коэффициента шероховатости принима-

Рис. 6.12. Идентифицированное значение коэффициента шероховатости исследуемого участка Каракумского канала



лось равным $u^0 = 0.0015$. При расчете нестационарного течения с таким значением u^0 максимальное расхождение расчетных Z и экспериментальных Z_e уровней в заданных трех створах за 5 часов расчета доходило до 1.8м. Это слишком много.

Для идентификации коэффициента шероховатости использовался метод минимизации (4.27). На рис. 6.12 представлено полученное оптимальное значение коэффициента шероховатости для заданного участка Каракумского канала. Видно, что оптимальное значение коэффициента шероховатости $u(x)$ является существенно непостоянной величиной по длине русла.

Расхождение между экспериментальным уровнем и рассчитанным для идентифицированного значения $u(x)$ не превосходит 0.15м. Данная точность расчета уровня Z потока воды, при заданной крайне малой и неточной исходной информации, является вполне удовлетворительной.

6.3. Оптимальное управление работой насосной станции на канале

В § 3 первой главы обсуждалась проблема оптимального управления работой гидротехнических сооружений для нужд мелиорации, гидроэнергетики и др. В §5 предыдущей главы была сформулирована задача оптимального управления работой насосной станции для наилучшего удовлетворения запросов потребителей воды при наличии различных ограничений на работу насосной станции. Целью управления является удержание уровня или глубины воды в нижнем створе x_1 канала (см. рис. 1.4) как можно ближе к номинальному значению Z_n (или H_n) при произвольном режиме работы потребителя Q_1 в том же нижнем створе. В этом случае функцией управления $u(t)$ является расход воды $Q(t, x_0)$ на левой границе x_0 канала. В §5 предыдущей главы был получен градиент целевого функционала и обоснована управляемость соответствующей СРП (5.35) относительно $u(t)$ по целевому функционалу (5.57).

В данном параграфе мы рассмотрим конкретные численные решения поставленной задачи. Особое внимание будет уделено реализации многочисленных ограничений на управление - (1.15), (1.16), (1.17) и на состояние потока - (1.18). В связи с чем, основной целью настоящего параграфа является проверка и демонстрация работоспо-

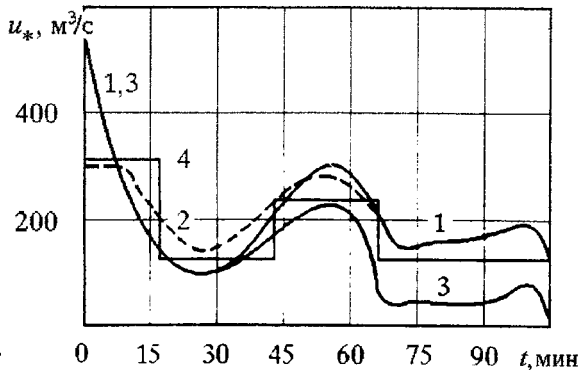
способности и эффективности прямых алгоритмов минимизации с ограничениями. Эти алгоритмы подробно описаны в §4 главы 4. Они включают в себя как традиционные, так и нетрадиционные методы.

Тестовые расчеты проводились для гипотетического канала, подобного описанному в предыдущем параграфе. В начальный момент времени течение считалось стационарным с расходом воды $107 \text{ м}^3/\text{с}$ и номинальной глубиной в нижнем бьефе $H_n = 4.17 \text{ м}$. Глубина в верхнем бьефе $H(t=0, x_0) = 3.6 \text{ м}$, уклон дна $i = 0.00015$, коэффициент шероховатости ложа русла $n = 0.0245$, длина русла 20 км . При $t > 0$ в нижнем бьефе потребитель воды мгновенно увеличивал расход до $130 \text{ м}^3/\text{с}$. Заданное время регулирования водоподачи составляло 105 минут. Пространственно-временное множество функционирования канала при этом определяется выражением:

$$\Sigma = (0, 105 \text{ мин}) \times (0, 20 \text{ км}).$$

Кривая 1 рис. 6.13 – это оптимальная реакция верхнебьефной насосной станции на работу потребителя при отсутствии каких-либо ограничений. Данная кривая получена обычным градиентным методом с параметром шага b^k , вычисляемым согласно методике (4.18) при $b_1 = 1.25$, $b_2 = 0.5$. Начальное приближение управления принималось равным $u^0(t) = 130 \text{ м}^3/\text{с}$. Градиентный метод сходился приблизительно за 20 итераций и обеспечивал уменьшение целевого функционала (5.57)

Рис. 6.13. Оптимальное управление расходом воды на насосной станции при различных ограничениях:
 1 - управление без ограничений;
 2 - ограничение на максимальный расход;
 3 - изопериметрическое ограничение;
 4 - ограничение на класс функций (кусочно-постоянное управление)



(или (1.14) в главе 1) в 3.7 раза. Добиться более существенного уменьшения целевого функционала J , в рассматриваемой постановке задачи управления, невозможно, поскольку, согласно анализу управляемости §5 предыдущей главы, на множестве $S'/s' \approx (0, 40 \text{ мин}) \times x_1$ глубина потока H неуправляема. Время распространения характеристики ξ_+ от x_0 к x_1 составляет около 40 мин, поэтому до момента $t_c \approx 40 \text{ мин}$ значение J неуправляемо.

Из рисунка видно, что расход воды в верхнем бьефе в начальный момент времени мгновенно возрастает приблизительно в 5 раз. Это объясняется тем, что изменение расхода в верхнем бьефе достигает нижнего бьефа примерно за 40 мин (время распространения характеристики ξ_+), а к этому моменту времени невязка глубин $H - H_n$ уже значительна, поэтому для ее минимизации требуется мгновенная подача больших объемов воды.

Второй пик в управлении приходится на время около 55 мин (время распространения характеристики ξ_- от x_1 к x_0), что соответствует приходу волны понижения от нижнего бьефа к верхнему и вызывает соответствующую реакцию гашения этой волны. Расход насосной станции после 65 мин остается приблизительно постоянным и равным начальному приближению. Здесь управление $u(t)$ выходит из области управляемости $S = (0, 65 \text{ мин}) \times x_0$.

Теперь перейдем к исследованию ограничений. На том же рис. 6.13 представлены значения управляемых расходов верхнебьефной насосной станции при различных ограничениях на ее работу.

Естественно считать, что начальный значительный пик расхода воды (кривая 1) технически не реализуем. Поэтому, согласно ограничению (1.15) на допустимое множество управлений $U_{ад}$, было введено ограничение на максимальное значение управления u_{max} :

$$U_{ад} = \{u: u(t) \leq u_{max} = 300 \text{ м}^3/\text{с}\}. \quad (6.23)$$

Методом проекции спуска на допустимое множество управлений (6.23) было получено оптимальное управление – пунктирная кривая 2 рис. 6.13. Целевой функционал при этом уменьшился всего лишь в 2.9 раза, что и следовало ожидать при сужении возможностей условий управления. Полученное решение $u_*(t)$ лежит на границе допустимого множества $U_{ад}$. Теперь в начале работы насосной станции оптимальный расход воды составляет $300 \text{ м}^3/\text{с}$ вместо предыдущего неограниченного

управления - $535 \text{ м}^3/\text{с}$.

Рассмотрим изопериметрическое ограничение (1.16) на объем перекачиваемой воды:

$$\int u dt = K = 898 \cdot 10^3 \text{ м}^3, \quad (6.24)$$

где изопериметрическая постоянная K определяет плановое количество воды, которое необходимо подать в верхний бьеф канала при любом характере регулирования водоподачи в течение рассматриваемого времени. Значение $K = 898 \cdot 10^3 \text{ м}^3$ было задано, исходя из условия, что начальное приближение управления $u^0 = 130 \text{ м}^3/\text{с}$ удовлетворяет плановой подаче воды.

Ограничение (6.24) задает допустимое подпространство управлений $U_{\text{од}}$. Для минимизации в $U_{\text{од}}$ необходимо использовать специфическое направление спуска.

Согласно §4 главы 3 такой спуск должен состоять из двух подитераций. Первая подитерация - спуск из точки u^k в исходном неограниченном пространстве управлений и определение значения изопериметрического параметра K^k . Если $K^k \neq K$, то выполняется вторая подитерация - повторение спуска из той же точки u^k , но с новым направлением, обеспечивающим минимизацию в допустимом подпространстве $U_{\text{од}}$ по алгоритму (4.45). В рассматриваемом примере вторая итерация принимает вид:

$$u^{k+1} = u^k - \delta^k \nabla J^k - \frac{K^k - 898 \cdot 10^3 \text{ м}^3}{\text{valS}}, \quad (6.25)$$

где $\text{valS} = (t_b - t_a) = 6300 \text{ с}$.

На рис. 6.13 кривая 3 - это полученное оптимальное управление с рассматриваемым изопериметрическим ограничением (6.24). При этом объемы воды в начале и в конце минимизации целевого функционала (5.57) составили $898 \cdot 10^3 \text{ м}^3$ и $896 \cdot 10^3 \text{ м}^3$ соответственно. Заметим, что для предыдущих режимов управления (кривые 1 и 2) в конце минимизации были получены объемы, соответственно, $121 \cdot 10^4 \text{ м}^3$ и $125 \cdot 10^4 \text{ м}^3$, что существенно не укладывается в ограничение (6.24). Приведенные результаты показывают, что прямой экстремальный алгоритм (6.25) хорошо реализует изопериметрическое условие (6.24).

Целевой функционал (5.57) при наличии изопериметрического

условия уменьшился в 3.5 раза против 3.7 при отсутствии каких-либо ограничений. Из полученного управления - кривая 3 видно, что для избежания перерасхода воды требуется существенное снижение водоподачи по сравнению с кривой 1. Причем, чтобы менее всего "навредить" критерию качества управления - целевому функционалу (5.57), снижать водоподачу необходимо во второй половине процесса управления. Здесь, начиная с момента времени $t_a \approx 65$ мин, вода, подаваемая из верхнего бьефа x_0 , не успевает дойти до потребителя в нижнем бьефе x_1 к конечному моменту времени $t_b = 105$ мин.

Большинство насосных станций не могут менять непрерывно режим своей работы. Такое техническое ограничение должно учитываться при расчете оптимального режима управления насосной станцией в классе кусочно-постоянных функций. Согласно (1.17) было принято следующее ограничение:

$$u(t) = \begin{cases} 130 \text{ м}^3/\text{с на } US_i = (17 \text{ мин}, 42 \text{ мин}) \cdot x_0 \cup (67 \text{ мин}, 105 \text{ мин}) \cdot x_0, \\ u_j \text{ на } S_j = S \setminus S_i, \quad j=1,2, \end{cases} \quad (6.26)$$

где u_j - две компоненты вектора-управления $u \in E^2$, оптимальные значения которых необходимо найти для соответствующих интервалов времени.

Компоненты вектора-градиента, теперь уже целевой функции (5.57), а не функционала, вычислялись для управления $u \in E^2$ по формуле (4.46), которая принимала вид:

$$\begin{array}{ccc} 42 \text{ мин} & & 105 \text{ мин} \\ \nabla_1 J^k = \int_{17 \text{ мин}}^{42 \text{ мин}} \nabla J^k dt, & & \nabla_2 J^k = \int_{67 \text{ мин}}^{105 \text{ мин}} \nabla J^k dt. \end{array} \quad (6.27)$$

Далее оптимальное управление находилось конечномерным градиентным методом.

Полученное оптимальное управление представлено кривой 4 на рис. 6.13. Видно, что полученное ступенчатое управление требует относительно небольших максимальных расходов воды, а именно - $315 \text{ м}^3/\text{с}$ вместо $535 \text{ м}^3/\text{с}$ при управлении без ограничений, однако качество такого управления заметно хуже. Целевой функционал J здесь уменьшился только в 3.1 раза.

Рассмотрим ограничение (1.18) на состояние потока в виде:

$$H(t, x) \leq H_{\max} = 4.5 \text{ м на } \Sigma. \quad (6.28)$$

Заметим, что до начала управления каналом глубина потока воды в верхнем бьефе составляла 3.6 м, а в нижнем бьефе - 4.17 м. В процессе управления при отсутствии всех ограничений (кривая 1 рис. 6.13) максимальное значение глубины достигало 5.45 м в начале управления в районе верхнего бьефа и 4.61 м в конце управления в районе нижнего бьефа. Ограничение (6.28) предполагает, что глубины потока более 4.5 м не безопасны для эксплуатации канала.

Для реализации ограничения (6.28) при оптимизации режима работы канала применялась техника штрафных функционалов, подробно рассмотренная в конце §4 главы 4.

Для внешнего штрафа исследовались две штрафные функции:

$$I_F = (H/H_{\max})^{\alpha} - 1 \quad (6.29)$$

и

$$I_F = (H - H_{\max})^{\alpha} \quad (6.30)$$

при $H > H_{\max}$, иначе $I_F = 0$. Для внутреннего штрафа -

$$I_F = (H - H_{\max})^{-\alpha}. \quad (6.31)$$

Здесь $\alpha \geq 1$ - экспериментально подбираемые показатели степени штрафных функций.

Согласно (4.48) минимизировался функционал

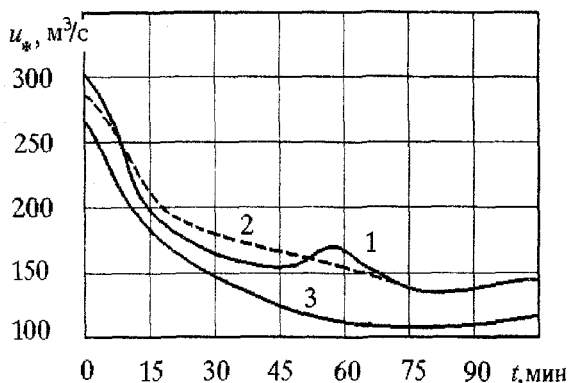
$$J = J_0 + \zeta \int_{\Sigma} I_F dt dz, \quad (6.32)$$

где J_0 - исходный целевой функционал (5.57).

Приведенным штрафным функциям I_F соответствуют оптимальные управления - кривые 1-3 рис. 6.14. Для внешних штрафов принимался показатель степени $\alpha = 2$, а весовой коэффициент $\zeta = 1$, для внутреннего штрафа - $\alpha = 1$, а $\zeta = 10^{-9}$. Функционал (6.32) уменьшался соответственно в 2.5, 2.5, 2.0 раза.

При управлении с внутренним штрафом ограничение (6.28) никогда не нарушалось. При управлении с внешними штрафами выход за ограничение (6.28) наблюдался в районе верхнего бьефа, соответ-

Рис. 6.14. Оптимальное управление расходом воды на насосной станции при ограничениях на состояние потока:
 1, 2 - ограничение внешним штрафом;
 3 - ограничение внутренним штрафом



ственно в девяти и девятнадцати пространственно-временных расчетных точках и достигал в обоих случаях одной и той же максимальной величины 4.68м. Как видно из рис. 6.14 при внутреннем штрафе расход воды на насосной станции оказывается меньшим по сравнению с расходами, полученными при внешних штрафах. Такой характер управления полностью согласуется с идеологией штрафов. Принятие решения о наиболее подходящей функции штрафа - это весьма субъективная и индивидуальная процедура для каждого конкретного канала и административного персонала.

Таким образом, в прямом экстремальном подходе для решения задач оптимизации СРП многие ограничения на управление и состояние СРП реализуются наглядно и относительно просто.

6.4. Оптимальное управление охлаждением непрерывного стального слитка

В §4 первой главы обсуждались проблемы оптимального управления теплофизическими процессами при непрерывной разливке стали с целью формирования слитков желаемого качества. Актуальной задачей технологии непрерывного литья является получение качественных слитков круглого сечения, при этом уравнение теплопереноса имеет вид (1.20). Задача оптимизации процесса затвердевания непрерывного

цилиндрического слитка формулируется следующим образом. Необходимо найти оптимальный поток тепла $u(z)$ в граничном условии (1.22), который минимизирует термонапряжения в форме функционала (1.24):

$$J_0 = \int_0^R \int_0^z \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]^2 \theta(r-r_s) \theta(z-z_c) r dr dz. \quad (6.33)$$

В §6 предыдущей главы был получен градиент целевого функционала (6.33). В данном параграфе мы рассмотрим конкретные численные решения поставленной задачи прямыми экстремальными методами (4.27)–(4.29).

Исходная нелинейная (1.20) – (1.22) и сопряженная (5.95) – (5.96) эллиптические СРП решались численно. Предварительно обе СРП были преобразованы к формальному параболическому виду, а именно, члены с первой производной по z – $C_p W \frac{\partial T}{\partial z}$ и $C_p W \frac{\partial T}{\partial z}$ были преобразованы к производным по времени. С учетом того, что скорость литья $W = \Delta z / \Delta t$ – величина постоянная, получаем соответственно:

$$C_p [W] \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad C_p [W] \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad (6.34)$$

где $[W]$ – безразмерное значение скорости литья. При условии (6.34) обе СРП можно рассматривать как параболические. Далее для их решения использовалась неявная широко известная конечно-разностная схема Кранка–Николсона второго порядка точности [5] с 50 шагами по радиусу слитка и со 150 шагами по длине слитка, или, с учетом (6.34), – со 150 шагами по времени. Принимались следующие значения шага сетки по радиусу слитка – $\Delta r = 0.002$ м и шага сетки по длине слитка – $\Delta z = 0.2$ м. Поскольку исходная СРП (1.20) нелинейная, то на каждом шаге Δz осуществлялись переитерации для уточнения значений параметров C , ρ , λ . Как показали расчеты, вполне достаточно делать 3 переитерации.

Расчеты проводились со следующими значениями параметров, которые рекомендуются в работах [70, 86]. Длина слитка $Z = 30$ м, длина кристаллизатора $z_c = 0.9$ м, температура кристаллизатора $T_c = 293$ К, скорость литья $W = 0.013$ м/с, скрытая теплота кристаллизации $w = 272$ кДж/кг, равновесный коэффициент распределения примесей $k = 0.4$, $C_1 = 416$ Дж/(кг·К), $C_2 = 840$ Дж/(кг·К), $\rho_1 = 7000$ кг/м³, $\rho_2 = 7800$ кг/м³, $\lambda_1 = 32$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 32$ Вт/(м·К).

Ограничение (1.25) на температуру слитка при выходе $z=Z$ из установки непрерывного литья учитывалось в §4 предыдущей главы в виде штрафного функционала. При этом целевой функционал принимал вид:

$$J = J_0 + \zeta J_F \rightarrow \inf. \quad (6.34)$$

Использовалась внешняя штрафная функция

$$I_F = (T - T_{\max})^2 \quad (6.35)$$

при $T > T_{\max}$, иначе $I_F = 0$. Согласно техническим условиям литья максимальная температура $T_{\max} = 1100\text{K}$. В расчетах принимался весовой коэффициент $\zeta = 10^4$.

Для проведения тестовых расчетов и проверки эффективности разработанных в главе 4 алгоритмов оптимизации для данной задачи был задан тестовый целевой функционал, по аналогии с предыдущими параграфами:

$$J_0 = \int_0^R \int_0^Z (T - T_*)^2 \theta(r - r_*) \theta(z - z_c) r dr dz. \quad (6.36)$$

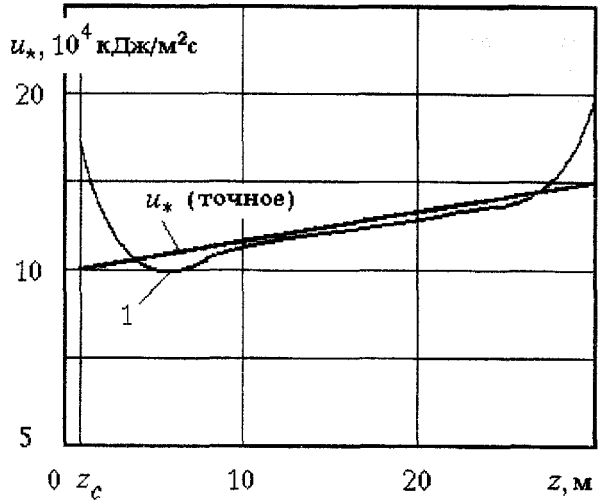
где T_* - поле температур, которое рассчитывалась при оптимальном тестовом потоке тепла (см. рис. 6.15)

$$u_*(z) = 100 + \frac{50(Z-z)}{Z-z_c} \text{ кДж/м}^2\text{с}. \quad (6.37)$$

Задавалось постоянное начальное приближение потока $u^0 = 200 \text{кДж/м}^2\text{с}$ и методом (4.27) с постоянными начальными аппроксимациями (шаблоны ϕ^k - по формуле типа (6.4)) решалась задача об определении функции $u(z)$, доставляющей минимум функционалу (6.36).

На рис. 6.15 показана сходимость искомого потока тепла к оптимальному значению u_* за 20 итераций двумя методами. Полученное решение на последней итерации новым методом с регулируемым направлением спуска (4.27) совпадает на рис. 6.15 с точным тестовым значением (6.37) при максимальном расхождении температур

Рис. 6.15. Тестовая задача оптимального управления охлаждением непрерывного слитка. 1 - метод наискорейшего спуска



$\max |T - T_*| = 0.3\text{К}$. Это достаточно высокая точность. Наблюдается быстрая равномерная сходимость к оптимальному решению. В то же время традиционный МНС обеспечил всего лишь решение — кривая 1. Дальнейшее увеличение числа итераций не существенно повлияло на вид кривой 1. Данные результаты еще раз подтверждают высокую эффективность прямого экстремального подхода.

После проведения тестовых расчетов была решена исходная задача минимизации термонапряжений для функционала (6.34). Метод (4.27) реализовывался с $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.3$ и с теми же постоянными шаблонными приближениями ϕ^k при $u^0 = 200 \text{ кДж/м}^2 \text{ с}$.

На рис. 6.16 показаны полученные оптимальные функции $u_*(z)$ охлаждения слитка во вторичной зоне $z \in (z_c, Z)$ для разных допустимых штрафных температур $T_{ад}$. Минимизирующий алгоритм (4.27) практически закончил сходимость за 20 итераций.

При штрафной температуре $T_{ад} = T_{\max} = 1100\text{К}$ функционал J (6.34) уменьшился в 1.8 раз, а критерий термонапряжений J_0 (6.33) — в 1.9 раз. Если допустимую температуру $T_{ад}$ выхода слитка из машины непрерывного литья увеличить до 1300К, то мы получим новое значение оптимального управления $u_*(z)$ (см. рис 6.16), которое позволяет снизить отток тепла из зоны вторичного охлаждения. При этом существенно снижаются термонапряжения в затвердевшей части S'

слитка, критерий J_0 уменьшается в 2.7 раза. Данный факт имеет естественное объяснение, чем медленнее мы охлаждаем слиток, тем меньшим термонапряжениям он подвергается, что и подтвердили расчеты.

Рис. 6.16. Оптимальное управление охлаждением непрерывного слитка при различных ограничениях на максимально допустимую температуру выхода слитка из машины непрерывного литья

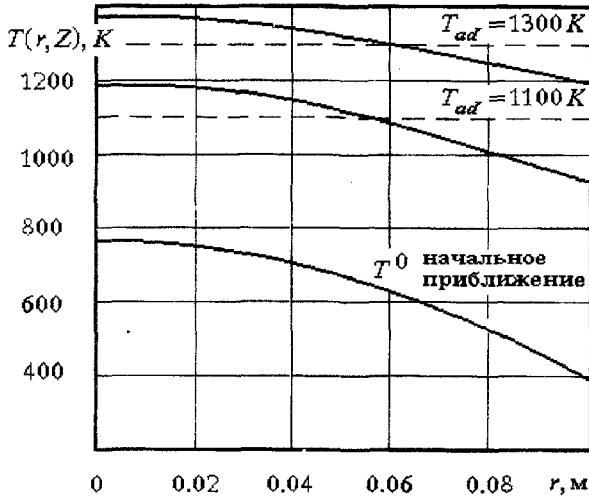
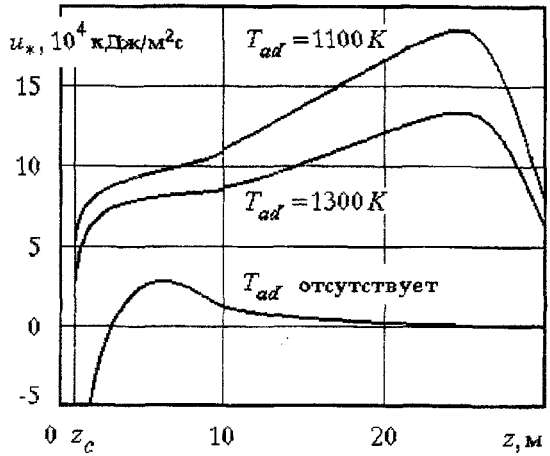


Рис. 6.17. Температура в поперечном сечении слитка на выходе из машины непрерывного литья при оптимальном охлаждении с ограничениями

В обоих случаях управления внутри слитка при $r < 0.06\text{м}$ на выходе из машины непрерывного литья при $z=Z$ температура T превышает максимально допустимые значения (см. рис. 6.17), что характерно для внешних штрафов. Вблизи поверхности слитка, при $r > 0.06\text{м}$ и $z=Z$, ограничение (1.25) на максимально допустимую температуру T_{max} не нарушается. Это означает, что отток тепла в данной области может быть снижен для уменьшения термонапряжений, что и демонстрируют концы кривых рис. 6.16. Здесь оттоки тепла резко снижаются. Таким образом, полученные оптимальные управления имеют физический смысл.

На основании полученных результатов оптимального теплоотвода в зоне вторичного охлаждения непрерывного слитка можно рекомендовать реализовывать отток тепла в виде функции, растущей от кристаллизатора по мере вытяжки слитка и резко убывающей в завершающей фазе вторичного охлаждения. Во избежание прорыва твердой корочки слитка сразу за кристаллизатором, функция теплоотвода не должна начинаться с нулевого значения.

Если ограничение (1.25) на температуру отсутствует, то термонапряжения за 10 итераций снижаются в 30 раз по сравнению с их начальным значением J^0 . По-существу термонапряжения исчезают. При этом функция оптимального управления $u_*(z)$ принимает иной вид - рис. 6.16. При таком "оптимальном" управлении твердая фаза слитка остается только возле кристаллизатора, т.е. $S' \approx 0$. Во всей остальной части зоны вторичного охлаждения слиток находится в двухфазном состоянии при температуре солидуса с градиентом $\nabla T = 0$.

Таким образом, мы видим, что ограничение на максимально допустимую температуру выхода слитка существенно влияет на вид оптимального теплоотвода $u_*(z)$ и на термонапряжения. Ограничение (1.25) для задач минимизации термонапряжений при непрерывной разливке металла впервые введено в работах [31,122]. До этого времени, как отмечалось в первой главе, данные задачи исследовались без каких-либо ограничений, что, как показали результаты расчетов, принципиально недопустимо.

Все расчеты, приведенные в данной главе, демонстрируют достоверность и высокую эффективность разработанных алгоритмов минимизации функционалов. Прямой экстремальный подход позволил решить с высокой точностью ряд актуальных задач, решение которых традиционными методами с приемлемой точностью оказалось невозможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин С.А., Иванов С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМК ВО, 1989.
2. Авдогин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1979.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. Алтуний В.С и др. Проектирование и гидравлический расчет крупных земляных каналов // Гидротехника и мелиорация. 1981. №7, с. 16-20.
5. Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир. Т.1. 1990.
6. Аниконов Ю.Е., Бубнов Б.А. Вопросы управления и обратные задачи // Докл. АН СССР. 1989. Т.304. №2.С. 309-312.
7. Атанов Г.А., Воронин С.Т. Оптимизация режимов работы гидроэнергетических установок. Киев-Донец: Вища школа, 1985.
8. Атанов Г.А., Воронин С.Т., Толстых В.К. О задаче идентификации параметров открытых русел // Водные ресурсы. 1986. №4. С. 69-78.
9. Атанов Г.А., Зуйкова З.Г. Вариационная задача газовой динамики с условиями на замыкающей характеристике // Мет. методы механики жидкости и газа. Днепропетровск: ДГУ. 1982. С.125-130.
10. Атанов Г.А., Толстых В.К. Задачи оптимизации нестационарных волновых процессов // Теор. и прикладн. механика. 1993. Вып. 24. С.89-93.
11. Афанасьев А.П. Исследование экстремальных характеристик динамических систем методами вариационного исчисления // Прикладн. проблемы управления макросистемами. Тр. 1 Всес. шк.-семина. Алма-Ата. М.: ВНИИСИ. 1986. С. 30-36.
12. Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980.
13. Байдин Г.В., Федоренко Р.П. Опыт приближенного решения задач о стационарном течении вязко пластической среды // Препринт ин-та прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР. 1985. № 146.
14. Байдин Г.В., Федоренко Р.П. О приближенном решении некоторых негладких вариационных задач механики // Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР. 1985.

15. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1989.
16. Баландин Г.Ф. Теоретические основы формирования отливки. Ч.2. М.: Машиностроение. 1979.
17. Ваничук. Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука. 1980.
18. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1989.
19. Бобохидзе Ш.С. Гидравлическая автоматизация водораспределения на оросительных системах. М.: Колос. 1969.
20. Борисов В.Т., Виноградов В.В., Тяжелникова И.Л. Оптимизация теплофизических процессов литья // Тр. Института проблем литья АН УССР. Киев 1977. С. 32-50.
21. Бородин В.С., Володин Н.А., Толстых В.К. Идентификация параметров в моделях формирования отливок // Процессы литья. 1995. №1, с. 96-101.
22. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир. 1972.
23. Бургмайер П. Об управляемости систем с распределенными параметрами, описываемыми системами Гурса-Дарбу n -того порядка // Диф. уравнения. 1989. Т. 25. №11. С.1947-1956.
24. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука. 1975.
25. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Ч.2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука. 1990.
26. Васильев О.Ф., Гладышев М.Т. О расчете прерывных волн в открытых руслах // Изв. АН СССР, МЖГ. 1966. №6, с. 184-189.
27. Васильев О.Ф., Темноева Т.А., Щугрин С.М. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах // Изв. АН СССР, Механика. 1965. №2, с. 17-25.
28. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1981.
29. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1980.
30. Волин Ю.М., Островский Г.М. О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами // Автомат. и телемеханика. 1965. Т.

26. №7. С. 1197-1209.

31. Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Толстых В.К. Минимизация термических напряжений при непрерывной разливке стали // Тез. 7 конф. Моделир. и Исслед. устойчивости систем. Киев. 1996. С. 31.

32. Володин Н.А., Толстых В.К. О применении градиентного метода оптимизации к задаче теплового управления реактором // Автоматика. 1993. № 1. С. 40-44.

33. Воронин С.Т., Толстых В.К. Вопросы математического моделирования стоков. Деп. в УкрНИИТИ. 1984. №1632.

34. Воронин С.Т., Толстых В.К. Идентификация коэффициента шероховатости канала. ГосФАП СССР. 1985. №5080000802.

35. Воронин С.Т., Толстых В.К. Вариационный метод определения коэффициента шероховатости открытого русла. Тр. Гидрометцентра СССР. 1986. Вып. 283. С. 54-59.

36. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука. 1973.

37. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979.

38. Дементьев Б.А. Кинетика и регулирование ядерных реакторов. М.: Атомиздат. 1973.

39. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: ЛГУ. 1968.

40. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука. 1981.

41. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / под ред. В.М. Лятхере и Ю.С. Яковлева. М.: Энергия. 1976.

42. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука. 1980.

43. Егоров А.И. Об условиях оптимальности в одной задаче управления процессом теплопередачи // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12. №3.

44. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука. 1978.

45. Журавлев В.А., Китаев Е.М. Теплофизика формирования непрерывного слитка. М.: Металлургия. 1978.

46. Зигель О.Д. Непрерывная разливка стали // Тр. 1 Всесоюзн. конф. по непрер. разливке стали. М.: АН СССР. 1956. С. 164-175.

47. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах

управления для систем с распределенными параметрами. Киев: Наук. думка. 1988.

48. Иодфе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука. 1974.

49. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия. 1965.

50. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984.

51. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1986.

52. Картвелишвили Н.А. Неустановившиеся открытые потоки. Л.: Гидрометиздат. 1968.

53. Ковалев С.Н. Определение на ЭВМ гидравлических характеристик естественных водотоков при расчетах неустановившегося движения. В кн.: Гидравлические исследования и расчеты гидромелиоративных сооружений. М. 1982, с. 122-137.

54. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1981.

55. Краснов Б.И. Оптимальное управление режимами непрерывной разливки стали. М.: Металлургия. 1970.

56. Красовский Н.Н. Теория оптимальных управляемых систем // Сб. Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука. 1968.

57. Красовский Н.Н., Летво А.М. Теория аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1962. Т.23. №6.

58. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука. 1979.

59. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Новосибирск: Наука, 1970.

60. Лапотышкин Н.М., Лейтес А.В. Трещины в стальных слитках. М.: Металлургия. 1969.

61. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир. 1972.

62. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Мир. 1987.

63. Ляшенко А.Л., Неронова Л.П., Тороп Ю.А., Ярхо А.А. О выборе коэффициента шероховатости участков естественного русла для расчетов уровней свободной поверхности. В кн.: Гидравлика и

гидротехника, 1982. В 34, с. 16-19.

64. Миник С.А., Искра К.К. Об управляемости и наблюдаемости линейных систем в частных производных первого порядка // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32. №4. С. 300-302.

65. Мирошниченко В.В., Пономаренко В.С., Воронин С.Т. Алгоритм оптимизации графиков заполнения водохранилищ канала Днепр-Донбасс / Донецк. ун-т: Донецк. Рукопись деп. в ВИНТИ 14.02.77 N592-77.,

66. Михеев М.А. Основы теплопередачи. М.: Госэнергоиздат. 1956.

67. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука. 1971.

68. Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в Гильбертовых пространствах. К.: КГУ. 1985.

69. Негладкие задачи теории оптимизации и управления /Под ред. В.Ф. Демьянова. Л.: ЛГУ. 1982.

70. Недопекин Ф.В. Математическое моделирование гидродинамики и тепломассопереноса в слитках. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та. 1994.

71. Никитенко Н.И., Евтеева Д.П., Соколов Л.А., Сновида Н.Р. Оптимизация теплофизических процессов литья // Тр. Института проблем литья АН УССР. Киев 1977. С. 79-86.

72. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев: Наук. думка. 1988.

73. Огурцов А.П., Недопекин Ф.В., Белоусов В.В. Процессы формирования стельного слитка. Математическое моделирование заполнения и затвердевания. Днепродзержинск. 1994.

74. Оптимизация режимов затвердевания непрерывного слитка / Верзинь В.А., Жевлаков В.Н., Клявинь Я.Я. и др. Рига: Зинатне. 1977.

75. Плотников В.И. О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы) // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1968 Т. 8. №1

76. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1983.

77. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в

экстремальных задачах. М.: Наука. 1975.

78. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука. 1982.

79. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир. 1983.

80. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука. 1978.

81. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1977.

82. Самойлович Ю.А. Оптимизация теплофизических процессов литья // Тр. Института проблем литья АН УССР. Киев 1977. С. 59-65.

83. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.; Мир. 1973.

84. Серовайский С.Я. Некоторые вопросы идентификации нелинейных систем с распределенными параметрами // Числ. методы решения краев. задач. Алма-Ата. 1986. С. 63-68.

85. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука. 1977.

86. Соболев В.В., Трефилов П.М. Оптимизация тепловых режимов затвердевания расплавов. Красноярск: Изд-во КГУ. 1986.

87. Соболев В.В., Трефилов П.М. Теплофизика затвердевания металла при непрерывном литье. М.: Metallurgia. 1988.

88. Соболев В.В., Трефилов П.М. Процессы теплопереноса при затвердевании непрерывных слитков. Красноярск: Изд-во КГУ. 1984.

89. Соколов Л.Д. Общий вид температурной зависимости сопротивления деформации металлов. Горький: НПО Машпром. 1961.

90. Справочник по гидравлике / Под ред. В.А. Большакова. Киев: Вища школа. 1977.

91. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та. 1982.

92. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А.Миеле. М.: Мир. 1969.

93. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач // ДАН СССР. Т.151. №3. С. 501-504.

94. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986.

95. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1990.

96. Толстых В.К. Градиентный метод оптимального управления распределенными системами // Диф. уравнения. 1991. Т.27. №2. С. 303-312.

97. Толстых В.К. Идентифицируемость систем с распределенными параметрами // АИТ. 1989. №10. С. 49-56.

98. Толстых В.К. Новый метод минимизации функционалов для задач оптимизации с уравнениями в частных производных // Тез. 1 междунар. конф. Числ. методы в гидравлике и гидродинамике. 1994. С. 112.

99. Толстых В.К. О выборе критерия качества идентификации распределенных систем // АИТ. 1990. С. 187-189.

100. Толстых В.К. О применении градиентного метода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т.26. №1. С. 137-140.

101. Толстых В.К. Об идентификации теплопроводности стальных расплавов // Тез. конф. ДонГУ. 1993. С. 38.

102. Толстых В.К. Прямой подход для оптимизации сложных систем (новые условия оптимальности) // Тез. 7 конф. Моделир. и Исслед. устойчивости систем. Киев. 1996. С. 134.

103. Толстых В.К., Володин Н.А., Недопекин Ф.В., Топко А.В. Оптимизация термических напряжений при формировании непрерывного слитка. Тез. конф. ДонГУ. 1994. С. 26-27.

104. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978.

105. Фурсиков А.В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье-Стокса и Эйлера // Мат. сборник. 1981. Т. 115 (157). №(6). С. 281-306.

106. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир. 1975.

107. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука. 1973.

108. Чертоусов М.Д. Гидравлика. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1962.

109. Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов. М.: Стройиздат. 1969.

110. Чугаев Р.Р. Гидравлика. М.: Энергия. 1975.

111. Шмыглевский Ю.Д. Вариационные задачи газовой динамики // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. №5. С.1205-1220.

112. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. Думка. 1979.
113. Шипилин А.В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. №4. С. 9-18.
114. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир. 1979.
115. Chen W.H., Gavalas G.R., Seinfeld J.H., Wasserman M.L. A new algorithm for automatic history matching // Soc. Petrol. Eng. J. 1974. Vol. 14. N6. P. 593-608.
116. Chen W.H., Seinfeld J.H. Estimation of the location of the boundary of a petroleum reservoir. // Soc. Petrol. Eng. J. 1974. Vol. 15. N1. P. 19-38.
117. Ito K., Kunisch K. Augmented Lagrangian-SQP-Method in Hilbert spaces and application to control in the coefficient problems // Prepr. Techn. Univer. Berlin. 1994. N370.
118. Ito K., Kunisch K. Augmented Lagrangian-SQP-Method for nonlinear optimal control problems of tracking type // Prepr. Techn. Univer. Berlin. 1994. N370.
119. Russel D.L. Controllability and stability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Review. 1978. Vol. 20, p. 639-739.
120. Tolstykh V.K. Direct extreme approach in control theory for distributed systems // Abs. Sump. Operations Research, Passau-Germany. 1995. P. 114.
121. Tolstykh V.K. Minimizing in Hilbert spaces // Abs. Sump. Operations Research, Passau-Germany. 1995. P. 45.
122. Tolstykh V.K., Volodin. Optimal control by heat flow in continuous casting steel. Proc. Sump. Operations Research, Braunschweig, Germany, 1996.
123. Zi-Cai Li, Ling-Jia Zhan, Hui-Li Wang. Difference methods of flow in branch channel. J. Hydraul. Eng. Vol. 109, N3, p.424-446.

Научное издание

ТОЛСТЫХ Виктор Константинович
доцент кафедры кибернетики и вычислительной техники
Донецкого госуниверситета
E-mail: tvk@univ.donetsk.ua

**Прямой экстремальный подход для оптимизации систем
с распределенными параметрами**

Сдано в набор 18.01.97. Подп. к печ. 28.03.97. Формат 60х84/16
Усл. печ. л. 11. Бумага офсетная. Печать трафаретная (дубликатор).
Тираж 200. Заказ 98. Типография ПО "Чайка"